MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2014/2015
27.11.2014

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. Dürr

Blatt 8

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in Ihrer Übungsgruppe ab.

8.1 Eine Teilfolge einer Folge ist eine neue Folge, die entsteht wenn Folgenglieder der ursprünglichen Folge weggelassen werden. Man zeige: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

8.2 Man berechne, falls existent:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+q)^n} \text{ für } q\in\mathbb{R}$$

8.3 Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.
Hinweis: Es gibt zwei schnelle Lösungen: 1.) n durch $a_n := \sqrt[n]{n}-1$ ausdrücken und geeignet abschätzen. Oder 2.) Verwenden Sie die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel.

8.4 Sei $x_n := (1-\frac{1}{n^2})^n$. Man zeige, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.

8.5 Welche der folgenden Reihen sind divergent, welche konvergent und welche absolut konvergent? Beweisen Sie Ihre Antworten.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^2 \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \tag{3}$$

8.6 Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=x$.

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k-x$.

8.7 (a) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nln(n)}$.

(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(ln^{\alpha}(n))}$ für $\alpha>1$.