

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. Dürr

Blatt 7

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in Ihrer Übungsgruppe ab.

7.1 Zeigen Sie, dass die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ein Körper ist. Dabei ist $i^2 = -1$. Man kann diesen Körper auch als $\mathbb{R}^2$ mit $(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$ und $(x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y)$ auffassen.

- 7.2** (a) Geben Sie die Eulerform von $3 + 2i$ an. (Polardarstellung)
(b) Geben Sie $2e^{\pi i/4}$ in der Form $a + bi$ an
(c) Berechnen Sie $|3e^{0,3\pi i} + 2e^{-1,6\pi i}|$.
(d) Finden Sie die dritten Wurzeln der Zahl $w = 3 + 4i$.
(e) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil:

$$\frac{-2 + 7i}{5 + 2i}, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^6.$$

- (f) Man finde alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms $x^3 + 2x^2 + 3x - 6$

7.3 Man zeige mit Induktion: Sei $P_n(z)$ ein Polynom n-ten Grades über den komplexen Zahlen.

$$P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - \delta_k)$$

Hinweis: Hauptsatz der Algebra: Sei P_n Polynom n-ten Grades über $\mathbb{C}$ und $n \geq 1 \Rightarrow \exists$ mindestens eine Nullstelle δ von P_n .

7.4 Man charakterisiere geometrisch (Skizze) diejenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

$$|z - 2| + |z + 2| = 5 \quad (1)$$

$$0 < \operatorname{Re}(iz) < 1 \quad (2)$$

7.5 Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist e^{z^2} reell?

7.6 (a) Bestimmen Sie, falls vorhanden, Infimum und Supremum der folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, M_2 = \left\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, M_3 = \left\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\right\}, M_4 = \left\{\frac{1}{x} \mid x > 0\right\}.$$

- (b) Sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente, monoton fallende Folge oberer Schranken von A . Sei $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
Zeigen Sie: $x_n \geq x$ und x ist obere Schranke von A .