Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. Dürr

Blatt 6

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in Ihrer Übungsgruppe ab.

6.1

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von abzählbaren Mengen. Dann ist das unendliche kartesische Produkt

$$M = \times_{n\in\mathbb{N}} M_n$$

abzählbar.
Anmerkung: Man widerlegt Aussagen z.B. durch Auffinden eines Gegenbeispiels.

(b) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, d.h. es existiert eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(k) \mapsto q_k$. Zeigen Sie: Es gibt keine Abzählung, die die rationalen Zahlen der Größe nach ordnet $f(k) < f(k+1) \forall k \in \mathbb{N}$.

6.2 In einem angeordneten Körper M kann ein Betrag definiert werden:
$\forall x \in M$ sei

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Man zeige:

(a) $|x| = |-x|$
(b) $\forall x, y \in M, |xy| = |x||y|$
(c) die Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in M$ gilt $|x+y| \leq |x| + |y|$
(d) $\forall x, y \in M$ gilt $|x| - |y| \leq |x+y|$

6.3 Sei M ein Körper. Man zeige, dass das Inverse bezüglich der Multiplikation eindeutig ist.

6.4 Zeigen Sie: Jede konvergente Folge ist auch eine Cauchy-Folge.

6.5 Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(a) $a_n := \frac{(n+1)(3n^2-n)}{(2n-5)^5}, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

(b) $b_n := \frac{n^2-1}{n^4+2n^3-2n-1}, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Beweisen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(c) $c_n := \sqrt{n} - \sqrt{n-1},\ n \in \mathbb{N}$. Ist diese Folge konvergent und wenn ja, wogegen konvergiert sie?

Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen.

6.6 Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Zahlen-Folge mit $x_n > 0,\ \forall n$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq 0\,.$$

Gilt auch die schärfere Aussage

$$\lim_{n\to\infty} x_n > 0\,?$$