MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2014/2015
06.11.2014

# Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. Dürr

Blatt 5

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in Ihrer Übungsgruppe ab.

**5.1** Der Multinomialkoeffizient (auch Polynomialkoeffizient genannt) vom Grad $r \in \mathbb{N}$ ist definiert als

$$\binom{n}{n_1, \quad n_2, \ldots, \quad n_r} := \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}\,.$$

Seien $x_1, \ldots, x_r$ gegeben. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Multinomialformel

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_r = 0 \\ n_1 + \ldots + n_r = n}}^{n} \binom{n}{n_1, \quad \ldots, \quad n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}\,.$$

Das Summenzeichen ist so zu verstehen, dass genau über diejenigen $r$-Tupel $(n_1, \ldots, n_r) \in \{0, \ldots, n\}^r$ summiert wird, bei denen $n_1 + \ldots + n_r = n$ ist.

*Bemerkung*: Der Multinomialkoeffizient gibt auch die Anzahl der Zuordnungen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) von $n$ Objekten auf $r$ Kästen an.

**5.2** Die Symbole $\wedge, \vee$ stehen für die logischen „und“ und „oder“; die Symbole $\forall, \exists$ stehen für „für alle“ und „es existiert“; die Symbolreihung $\{x|...\}$ steht für „die Menge aller $x$, die ... erfüllen“.

(a) Vervollständigen Sie folgende Ausdrücke:
Seien $M_1$ und $M_2$ Mengen, dann gilt

(1) $M_1 \cap M_2 = \{x|x \in .....\}$

(2) $M_1 \cup M_2 = \{x|x \in .....\}$

(3) $M_1 \subset M_2 \Longleftrightarrow \forall x \in ....$

(4) Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Mengen. Dann ist

$$\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha = \{x|.....\}$$

und

$$\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha = \{x|.....\}$$

(b) Sei $\Omega$ eine Menge und $M \subset \Omega$. Dann bezeichnet $\Omega \backslash M = M^c := \{\omega \in \Omega | \omega \notin M\}$. Sei $M_1 \subset M_2 \subset \Omega$. Zeigen Sie: $M_2^c \subset M_1^c$.

(c) Zeigen Sie
$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha^c$$
*Hinweis*: Gleichheit von Mengen $A = B$ kann man zeigen, indem man $A \subset B$ und $B \subset A$ zeigt.

**5.3** Gesetz der großen Zahlen

Sei $\{0,1\}^n = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) | x_k \in \{0,1\}, k = 1, 2, ..., n\}$ die Menge der $0-1$ n-Tupel. Sei für $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$
$$\mathcal{N}_n^\varepsilon = \{\vec{x} \in \{0,1\}^n | \ | \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \frac{1}{2})| > \varepsilon\}$$

(a) Machen Sie sich die Bedeutung von $\mathcal{N}_n^\varepsilon$ klar.

(b) Zeigen Sie nun das Gesetz der großen Zahlen für $0-1$ $n$-Tupel:
$$\frac{1}{2^n}|\mathcal{N}_n^\varepsilon| < \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$
Dies bedeutet, dass die relativen Häufigkeiten von 0 oder 1 für große $n$ typischerweise ungefähr gleich sind (Fluktuationen sind von der Größenordnung $\sqrt{n}$, für $\epsilon = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ ist die rechte Seite nichtssagend).

*Hinweise*:

1. Die Aufgabe ist nicht schwer. Man darf nur keine Angst vor Summen haben!
2. Für die Elemente der Menge $\mathcal{N}_n^\varepsilon$ gilt:
$$\frac{|\sum_{k=1}^n (x_k - \frac{1}{2})|}{n\varepsilon} > 1$$
Im Hinblick auf $\mathcal{N}_n^\varepsilon \subset \{0,1\}^n$ zeige man, dass
$$|\mathcal{N}_n^\varepsilon| < \sum_{\vec{x}\in\{0,1\}^n} \frac{|\sum_{k=1}^n (x_k - \frac{1}{2})|^2}{n^2\varepsilon^2}$$
3. Überlegen Sie sich, wie man $(\sum_{k=1}^n (x_k - \frac{1}{2}))^2$ sinnvoll in zwei Summen aufspalten kann. Von beiden Summen können Sie nun die Summe über alle $0-1$ $n$-Tupel bilden.

**5.4** Es seien $X, Y, Z$ Mengen und $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:
Für $g \circ f: X \to Z;\ x \mapsto g(f(x))$ gilt:

(a) $f, g$ injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv

(b) $f, g$ surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv

(c) $f, g$ bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv