MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2014/2015
23.10.2014

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. Dürr

Blatt 3

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in Ihrer Übungsgruppe ab.

3.1 Neben der Iteration, die man aus der Wechselwegnahme von Diagonale und Seite des Quadrates bekommt, kann man ebenfalls mit Hilfe des babylonischen Verfahrens $\sqrt{2}$ bestimmen. Die Iterationsvorschrift ist folgende:

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Rekursion genauso gut wie die aus der Wechselwegnahme ist: Geben Sie die Konvergenzgeschwindigkeit dieser Rekursion in Abhängigkeit von $x_0 > 0$ an, d.h. schätzen Sie $|x_n - \sqrt{2}|$ ab.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass gilt
(1) $x_n^2 - 2 = (x_n - x_{n-1})^2$ für $n \in \mathbb{N}$ und
(2) $(x_{n+1} - x_n)^2 \leq \frac{1}{4}(x_n - x_{n-1})^2$ für $n \in \mathbb{N}$
Benutzen Sie (1)und (2) um zu zeigen

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{(\frac{1}{x_0} - \frac{x_0}{2})^2}{4^{n-1}2\sqrt{2}}\,, n \in \mathbb{N}$$

(b) Geben Sie ein rationale Zahl an, deren Abstand zu $\sqrt{2}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.

3.2 a) Beweisen Sie: Für $1 \neq q \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

b) In einer späteren Aufgabe beweisen wir die Bernoulli-Ungleichung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt für $x \geq -1$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Im Folgenden sei $0 < q < 1$. Zeigen Sie nun unter Annahme der Bernoulli-Ungleichung:
Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $q^n \leq \epsilon$.

Beweisen Sie damit dann im zweiten Schritt: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\sum_{k=0}^{n} q^k - \frac{1}{1-q}| < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

3.3 Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Sei nun $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge für die gilt:
$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ so dass $| \, y_n - x_n \, | < \epsilon \;\forall n \geq N_\epsilon$. Zeigen Sie, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.