

## Grundlagen der Mathematik I – 8. Zentralübungsblatt

**Man beweise durch vollständige Induktion:**

- 1) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ .
- 2) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 2n^2 + n$ .
- 3) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\sum_{k=1}^n (3k - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$ .
- 4) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  ist  $n^2 - 2n - 1 > 0$ . (Direkt und mit Induktion!)
- 5) Zeige: Die Summe der Innenwinkel in einem konvexen  $n$ -Eck ist  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

**Was ist von den folgenden Sätzen und Beweisen zu halten?**

- *Satz.* In meinen Koffer passen beliebig viele Taschentücher.

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage

$A(n)$  : In meinen Koffer passen  $n$  Taschentücher

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $n = 1$  ist die Aussage sicher wahr: In meinen Koffer passt ein Taschentuch. Es sei nun  $n \geq 1$  und schon bewiesen, dass  $n$  Taschentücher in meinen Koffer passen. Aber, egal wie voll ein Koffer ist: Ein Taschentuch passt immer noch hinein. Also passen auch  $n + 1$  Taschentücher in meinen Koffer, und daraus folgt die Behauptung mittels vollständiger Induktion.

- *Satz.* Jede ungerade natürliche Zahl ist ein Vielfaches von 2.

*Beweis.* Ist  $n$  eine ungerade Zahl, und ist schon bekannt, dass  $n$  ein Vielfaches von 2 ist, also  $n = 2k$  für ein  $k$ , so ist die nächste ungerade Zahl  $n + 2 = 2k + 2 = 2(k + 1)$  wieder ein Vielfaches von 2. Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung.