Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, L. Nickel

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{0}(2k-1)^2 = 0$ („leere Summe") und $\frac{1}{3}n(4n^2-1) = 0$, die Behauptung stimmt also.

Induktionsschluss $n \to n+1$. Es sei $n \geq 0$ und es gelte $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$ (**Induktionsvoraussetzung**). Wir müssen zeigen, dass dann auch

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4(n+1)^2-1)$$

(**Induktionsbehauptung**) gilt. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2\right) + (2(n+1)-1)^2 \quad \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)}\\
&= \frac{1}{3}n(4n^2-1) + (2n+1)^2\\
&= \frac{1}{3}(4n^3-n) + (4n^2+4n+1)\\
&= \frac{1}{3}(4n^3-n+12n^2+12n+3)\\
&= \frac{1}{3}(4n^3+12n^2+11n+3)\\
&= \frac{1}{3}(n+1)(4n^2+8n+3)\\
&= \frac{1}{3}(n+1)(4(n+1)^2-1),
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Wirklich schön ist diese Art der Beweisführung nicht, weil die Faktorisierung des Ausdrucks $4n^3 + 12n^2 + 11n + 3$ alles andere als offensichtlich ist. Helfen würde hier der Trick, den Induktionsschluss nicht für den Schritt $n \to n+1$ für $n \geq 0$, sondern für den Schritt $n-1 \to n$ für $n \geq 1$ durchzuführen. Das sieht dann so aus:

Der **Induktionsanfang** ändert sich nicht.

Für den **Induktionsschluss** $n-1 \to n$ sei $n \geq 1$ und es gelte

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}(n-1)(4(n-1)^2-1)$$

ist (**Induktionsvoraussetzung**). Wir müssen zeigen, dass dann auch

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1) \qquad \text{(\textbf{Induktionsbehauptung})}$$

gilt. Nun ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)^2\right) + (2n-1)^2 && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)}\\
&= \frac{1}{3}(n-1)(4(n-1)^2-1) + (4n^2-4n+1)\\
&= \frac{1}{3}(n-1)(4n^2-8n+3) + 4n^2-4n+1\\
&= \frac{1}{3}(4n^3-12n^2+11n-3) + \frac{1}{3}(12n^2-12n+3)\\
&= \frac{1}{3}(4n^3-n)\\
&= \frac{1}{3}n(4n^2-1).
\end{aligned}$$

Man beachte, dass in dieser Rechnung kein „magisches Faktorisieren von Ausdrücken“ stattgefunden hat. Der Grund ist der, dass Ausklammern von n viel einfacher ist als Ausklammern von $n+1$; dass das passieren würde, war aber abzusehen, weil in der zu beweisenden Formel der Faktor n enthalten ist!

b) **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{0} k^3 = 0$ (leere Summe) und $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = 0$, die Behauptung stimmt also.

Sei also $n \geq 0$ und gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2. \qquad (\textbf{Induktionsvoraussetzung})$$

Es ist zu zeigen, dass dann auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \qquad (\textbf{Induktionsbehauptung})$$

ist. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)}\\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3\\
&= (n+1)^2 \cdot (\frac{1}{4}n^2 + n + 1)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 2. Die Eigenschaft i) einer Peanostruktur (Definition 5.1 der Vorlesung) ist erfüllt, denn die Funktion $\nu : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $\nu(n) = n + 1$, ist injektiv.
Eigenschaft ii) ist ebenfalls erfüllt, denn es gibt kein $n \in N = \mathbb{R}_0^+$ mit $\nu(n) = 0$, d.h. $n+1 = 0$.
Jedoch ist Eigenschaft iii) *nicht* erfüllt: Denn für die Teilmenge $M := \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}_0^+ = N$ gilt $0 = n_0 \in M$, und für jedes $m \in M = \mathbb{N}_0$ gilt auch $m + 1 = \nu(m) \in \mathbb{N}_0 = M$. Es ist jedoch $\mathbb{N}_0 \subsetneqq \mathbb{R}_0^+$, während Eigenschaft iii) erzwingen würde, dass $\mathbb{N}_0 = \mathbb{R}_0^+$ gilt.
Damit ist (N, n_0, ν) *keine* Peanostruktur. (Grob gesagt: Die Menge hat „zu viele“ Elemente, als dass man sie durch stetiges Nachfolgerbilden ausschöpfen könnte.)

Aufgabe 3. **Induktionsanfang.** Für $n = 1$ ist $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k\sqrt{k}} = 1$ und $3 - \frac{2}{\sqrt{1}} = 1$, so dass also die behauptete Ungleichung stimmt: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{1}}$.
Induktionsschluss $n \to n+1$. Es sei $n \geq 1$ und es gelte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$ (**Induktionsvoraussetzung**). Wir wollen zeigen, dass dann auch $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$ (**Induktionsbehauptung**) gilt. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\sqrt{k}} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)} \\
&\leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \\
&\overset{!}{\leq} 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

Die mit einem Ausrufezeichen versehene Ungleichung beweisen wir mit der folgenden Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned}
& 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \\
\iff\quad & \frac{2}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \\
\iff\quad & \frac{2(n+1)+1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \\
\overset{(*)}{\iff}\quad & \frac{(2n+3)^2}{(n+1)^3} \leq \frac{4}{n} \\
\iff\quad & n \cdot (2n+3)^2 \leq 4(n+1)^3 \\
\iff\quad & n \cdot (4n^2 + 12n + 9) \leq 4 \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) \\
\iff\quad & 4n^3 + 12n^2 + 9n \leq 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4) \\
\iff\quad & 0 \leq 12n - 9n + 4 \\
\iff\quad & 0 \leq 3n + 4 && \text{(wahre Aussage).}
\end{aligned}$$

An der mit $(*)$ markierten Stelle haben wir beide Seiten quadriert; dies ist in diesem Fall tatschlich eine Äquivalenzumformung, da wir es auf beiden Seiten der Ungleichung mit *nichtnegativen* Zahlen zu tun haben.

Es sei noch bemerkt, dass prinzipiell ausgeschlossen ist, die behauptete Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 3$ *direkt* mittels vollständiger Induktion zu beweisen: Denn dazu müsste man aus einer Ungleichung der Form $A < 3$ eine Ungleichung $A + B < 3$ mit $B > 0$ folgern, und das ist nicht möglich, weil man nicht weiss, „wie nah“ A bereits an der Grenze 3 liegt. Genau diese Quantifizierung des Abstands ist aber gegeben, wenn man sogar $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$ weiss, wie in der Induktionsvoraussetzung unseres Beweises.

Aufgabe 4.

a)
- **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ ist $2n^3 + 3n^2 + n = 0$ sicher durch 6 teilbar.
  Induktionsschluss $n \to n+1$**.** Es sei $n \geq 0$ und es gelte, dass $6|(2n^3 + 3n^2 + n)$ (**Induktionsvoraussetzung**). Zu zeigen ist $6|[2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1)]$ (**Induktionsbehauptung**).
  Es ist
  $$\begin{aligned} 2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1) &= 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 \\ &= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 + 3n^2 + 6n + 3 + n + 1 \\ &= 2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 6n + 2 + 6n + 3 + 1 \\ &= 2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6. \\ &= 2n^3 + 3n^2 + n + 6(n^2 + 2n + 1). \end{aligned}$$
  Nach Induktionsvoraussetzung gilt $6|(2n^3+3n^2+n)$, und trivialerweise ist auch $6|6$, also gilt nach 5.8f), dass $6|[2n^3+3n^2+n+6(n^2+2n+1)]$, also $6|[2(n+1)^3+3(n+1)^2+(n+1)]$, und das war zu zeigen.
- **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ ist $3^{2n} + 7 = 3^0 + 7 = 8$, und $8|8$.
  Induktionsschluss $n \to n+1$**.** Es sei $n \geq 0$ und es gelte $8|(3^{2n} + 7)$ (**Induktionsvoraussetzung**). Zu zeigen ist, dass $8|(3^{2(n+1)} + 7)$ (**Induktionsbehauptung**).
  Es ist
  $$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} + 7 &= 3^{2n+2} + 7 \\ &= 3^{2n} \cdot 3^2 + 7 \\ &= (3^{2n} + 7 - 7) \cdot 3^2 + 7 \\ &= (3^{2n} + 7) \cdot 3^2 - 7 \cdot 3^2 + 7 \\ &= (3^{2n} + 7) \cdot 3^2 - 63 + 7 \\ &= (3^{2n} + 7) \cdot 3^2 - 56 \end{aligned}$$
  Nach Induktionsvoraussetzung gilt $8|(3^{2n} + 7)$, sowie $8|56$, also gilt nach 5.8f), dass $8|[(3^{2n} + 7) \cdot 3^2 - 56]$, also $8|[3^{2(n+1)} + 7]$, und das war zu zeigen.

b) Sei $a \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Wir zeigen:
$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ ist } (a^2 + a + 1)|(a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}).$$
Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist $a^{n+1} + (a+1)^{2n-1} = a^2 + a + 1$ trivialerweise ein Vielfaches von $a^2 + a + 1$.

Induktionsschluss $n \to n+1$**.** Es sei $n \geq 1$ und es gelte $(a^2+a+1)|(a^{n+1}+(a+1)^{2n-1})$ (**Induktionsvoraussetzung**). Zu zeigen ist, dass $(a^2 + a + 1)|(a^{n+2} + (a+1)^{2(n+1)-1})$ (**Induktionsbehauptung**).
Es ist
$$\begin{aligned} a^{n+2} + (a+1)^{2(n+1)-1} &= a \cdot a^{n+1} + (a+1)^{2n+1} \quad \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)} \\ &= a \cdot a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}(a+1)^2 \\ &= a \cdot a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}(a^2 + 2a + 1) \\ &= a \cdot a^{n+1} + a(a+1)^{2n-1} + (a+1)^{2n-1}(a^2 + a + 1) \\ &= a \cdot \left(a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}\right) + (a+1)^{2n-1}(a^2 + a + 1). \end{aligned}$$
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $(a^2+a+1)|(a^{n+1}+(a+1)^{2n-1})$, und trivialerweise ist auch $(a^2 + a + 1)|(a^2 + a + 1)$, also gilt nach 5.8f), dass
$$(a^2 + a + 1)|[a \cdot (a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}) + (a^2 + a + 1)(a+1)^{2n-1}],$$
also $(a^2 + a + 1)|(a^{n+2} + (a+1)^{2(n+1)-1})$, und das war zu zeigen.

Aufgabe 5.

a) Lass und die angegebene abzählbar undendliche Mengen $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ bezeichnen. Jede von denen und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig, d.h. wir können die Elemente von A_i, $\forall i \in \mathbb{N}$ enumerieren: $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ...\}$.[1] Nun stellen wir die Folgen $\{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ...\}$ mit verschiedenen Nummern i unter einander:

$$\begin{array}{lll} a_{11} & a_{12} & a_{13}... \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}... \\ \vdots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3}... \\ \vdots & & \end{array}$$

Auf diese Tabelle können wir denselben diagonalen Pfad setzen, wie wir in der Aufgabe 4 vom ÜB7 genutzt haben. Dieser Pfad bestimmt die bijektive Abbildung zwischen den Elementen der Tabelle (Elemente der Vereinigung) und natürliche Zahlen. D.h., die Vereinigung ist abzählbar unendlich.

b) **Induktionsanfang**: Für $k = 1$ $\mathbb{N}^k = \mathbb{N}$, die offensichtlich abzählbar unendlich ist.
Induktionsschluss: Es sei $n \geq 1$ und es gelte, dass $\mathbb{N}^k$ abzählbar unendlich ist. Lass uns zeigen, dass $\mathbb{N}^{k+1}$ auch abzählbar unendlich ist.

Dafür reicht das zu bemerken, dass die Menge $\mathbb{N}^{k+1}$ dargestellt werden kann, wie eine Vereinigung von abzählbar unendlich vielen Mengen der Form $\{i\} \times \mathbb{N}^k$, wo $i \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{N}^{k+1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\{i\} \times \mathbb{N}^k\right),$$

aber das ist offensichtlich, dass $\mathbb{N}^k$ und $\{i\} \times \mathbb{N}^k$ gleichmächtig sind. D.h. $\{i\} \times \mathbb{N}^k$ ist abzählbar unendlich nach der Induktionsvoraussetzung. Also ist $\mathbb{N}^{k+1}$ die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen abzählbar unendliche Mengen, die auch abzählbar unendlich ist, wie wir in a) schon bewiesen haben.

[1] Übrigens ist das auch der Grund, warum wir die angegebene Mengen enumerieren konnten: da gibt es erst abzählbar unendlich viel von denen.