Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2017/18
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

Grundlagen der Mathematik I – 9. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion I). Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Formeln:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Aufgabe 2 (Peanostrukturen). Es sei $N = \mathbb{R}_0^+$, $n_0 = 0$ und $\nu : N \to N$, $\nu(n) = n+1$. Ist (N, n_0, ν) eine Peanostruktur? Falls nein: Welche der drei definierenden Eigenschaften einer Peanostruktur sind erfüllt, welche nicht?

Aufgabe 3 (Vollständige Induktion II). Beweisen Sie die Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$, indem Sie die schärfere Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion beweisen.

Aufgabe 4 (Teilbarkeit). Beweisen Sie die folgenden Teilbarkeitsaussagen mittels Induktion nach n:

a) $6 \mid (2n^3 + 3n^2 + n)$ und $8 \mid (3^{2n} + 7)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $(a^2 + a + 1) \mid (a^{n+1} + (a+1)^{2n-1})$ für alle $a \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5 (Gleichmächtigkeit). Beweisen Sie, dass

a) die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen[1] abzählbar unendlichen[2] disjunkten Mengen abzählbar unendlich ist.

b) die Menge $\mathbb{N}^k = \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N}}_{\text{k Mal}}$ abzählbar undendlich ist. (*Tipp*: Nutzen Sie die Induktion nach k).

Wenn Sie eine Korrektur wünschen, werfen Sie die Lösungen spätestens am **Freitag, 12. Januar 2018, 14 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) ein. Bitte die Angabe des eigenen Namens und der Bezeichnung des bei der Anmeldung angegebenen Tutoriums nicht vergessen! Bitte heften Sie Ihre Lösung zusammen!

[1] D.h., dass die Menge dieser Mengen abzählbar unendlich ist.
[2] die Menge heißt abzählbar unendlich, wenn sie gleimächtig $\mathbb{N}$ ist.