Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2017/18
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

Musterlösung des 8. Übungsblatts

Aufgabe 1. Wir suchen zu beliebig vorgegebenem $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ein Paar $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit $f(x, y) = (a, b)$. Aber es gilt

$$\begin{aligned}
& f(x,y) = (a,b) \\
\iff\ & (2x - 3y, 3x - 6y) = (a, b) \\
\iff\ & (2x - 3y = a) \ \wedge\ (3x - 6y = b) \quad \text{(erste Gleichung doppelt von der zweiten abziehen)} \\
\iff\ & (2x - 3y = a) \ \wedge\ (-x = b - 2a) \\
\iff\ & (-3y = -3a + 2b) \ \wedge\ (x = 2a - b) \\
\iff\ & (y = a - \frac{2}{3}b) \ \wedge\ (x = 2a - b),
\end{aligned}$$

also ist $(x, y) := (2a - b, a - \frac{2}{3}b)$ ein solches Paar (das ist die Richtung „$\Longleftarrow$" in der obigen Rechnung), und zwar das einzig mögliche (das ist die Richtung „$\Longrightarrow$"). Ersteres zeigt, dass f surjektiv ist, zweiteres, dass f injektiv ist, und zwar ist $f^{-1}(a, b) = (2a - b, a - \frac{2}{3}b)$.

Aufgabe 2. Zunächst bemerken wir, dass g tatsächlich eine Abbildung ist, denn der Fall $g(y) = 0$ kann für kein $y \in \mathbb{R}$ eintreten: Denn dann wäre $y = -\sqrt{4 + y^2}$, also $y^2 = 4 + y^2$ und damit $0 = 4$, Widerspruch.

a) Es ist für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(y) &= \frac{\sqrt{4 + y^2} + y}{2} - \frac{2}{\sqrt{4 + y^2} + y} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\sqrt{4 + y^2} + y}{2} - \frac{2 \cdot \left(\sqrt{4 + y^2} - y\right)}{\left(\sqrt{4 + y^2} + y\right) \cdot \left(\sqrt{4 + y^2} - y\right)} \\
&= \frac{\sqrt{4 + y^2} + y}{2} - \frac{2 \cdot \left(\sqrt{4 + y^2} - y\right)}{4 + y^2 - y^2} \\
&= \frac{\sqrt{4 + y^2} + y}{2} - \frac{\sqrt{4 + y^2} - y}{2} \\
&= y,
\end{aligned}$$

wobei wir im Schritt $(*)$ den zweiten Bruch erweitert haben, um im Nenner die dritte Binomische Formel anwenden zu können („Rationalmachen des Nenners"). Damit ist $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, was zeigt, dass f **surjektiv** ist.

Weiter ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= \frac{x}{2} - \frac{2}{x} + \sqrt{4 + \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^2} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{2}{x} + \sqrt{4 + \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2} - 2} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{2}{x} + \sqrt{2 + \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2}} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{2}{x} + \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)^2} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{2}{x} + \left|\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right|.\end{aligned}$$

Zum Loswerden der Betragsstriche bemerken wir, dass $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} > 0$ ist für $x > 0$ und $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} < 0$ für $x < 0$. Damit ergibt sich

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x & \text{falls } x > 0, \\ \frac{x}{2} - \frac{2}{x} - \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = -\frac{4}{x} & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Insbesondere ist $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. Daraus folgt aber, dass f **nicht injektiv** ist: Denn andernfalls wäre f sogar bijektiv, und aus $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ würde dann laut Vorlesung folgen $g = f^{-1}$, also auch $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} x \in M \quad &\iff \quad f(x) \leq \frac{3}{2} \\ &\iff \quad \frac{x}{2} - \frac{2}{x} - \frac{3}{2} \leq 0 \\ &\iff \quad \frac{x^2 - 4 - 3x}{2x} \leq 0 \\ &\iff \quad \frac{(x+1)\cdot(x-4)}{x} \leq 0. \end{aligned}$$

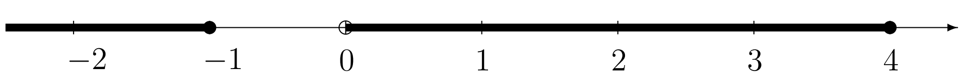
Wir bilden eine Vorzeichentabelle für die Wechselstellen -1, 0 und 4:

		-1		0		4	
$x+1$	$-$		$+$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$		$+$
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$\frac{(x+1)\cdot(x-4)}{x}$	$-$		$+$		$-$		$+$

Damit gilt

$$f(x) \leq \frac{3}{2} \quad \iff \quad \frac{(x+1)\cdot(x-4)}{x} \leq 0 \quad \iff \quad x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left]0, 4\right],$$

also $M = \left]-\infty, -1\right] \cup \left]0, 4\right]$.



Aufgabe 3. Zunächst sollten wir bemerken, dass f und g tatsächlich Abbildungen sind, also die angegebenen Zielmengen nicht zu klein sind. Das ist nur für g nicht ganz offensichtlich: Zu zeigen ist, dass

$$\pm\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}$$

für alle $u \in \mathbb{R}$, $v > 0$, stets positiv ist. Dies kann man so sehen:

$$\begin{aligned} v > 0 \quad &\Longrightarrow \quad v + \frac{u^2}{4} > \frac{u^2}{4} = \left(\frac{u}{2}\right)^2 \\ &\Longrightarrow \quad \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} > \sqrt{\frac{u^2}{4}} = \left|\frac{u}{2}\right| \\ &\Longrightarrow \quad \pm\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} > \pm\frac{u}{2} + \left|\frac{u}{2}\right| \overset{(*)}{\geq} 0, \end{aligned}$$

wobei wir für $(*)$ verwendet haben, dass für jede reelle Zahl a gilt $a + |a| \geq 0$ (denn für $a \geq 0$ ergibt dieser Ausdruck den Wert $2a$, der ebenfalls ≥ 0 ist, für $a \leq 0$ dagegen den Wert 0).

Wem diese Rechnung zu umständlich ist, der kann die Positivität unserer Zahlen bei entsprechender Inspiration auch folgendermaßen einsehen: Das Produkt der beiden Zahlen

$$\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} \quad \text{und} \quad -\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}$$

ist nach der dritten Binomischen Formel

$$v + \frac{u^2}{4} - \frac{u^2}{4} = v > 0,$$

also sind die Zahlen entweder beide positiv oder beide negativ; da ihre Summe aber

$$2 \cdot \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} \geq 0$$

ist, müssen sie beide positiv sein.

Nun können wir rechnen: Für alle $u, v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ gilt

$$\begin{aligned} (f \circ g)(u,v) &= f\left(\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}, \frac{u}{2} - \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}\right) \\ &= \left(\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} - \left(-\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}\right), \left(\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}\right) \cdot \left(-\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}\right)\right) \\ &= \left(\frac{u}{2} + \frac{u}{2}, v + \frac{u^2}{4} - \frac{u^2}{4}\right) \\ &= (u, v)\,, \end{aligned}$$

und für alle $x, y \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ gilt

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x, y) &= g(x-y, xy) \\
&= \left(\frac{x-y}{2} + \sqrt{xy + \frac{(x-y)^2}{4}}, -\frac{x-y}{2} + \sqrt{xy + \frac{(x-y)^2}{4}}\right) \\
&= \left(\frac{x-y}{2} + \sqrt{xy + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4}}, -\frac{x-y}{2} + \sqrt{xy + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4}}\right) \\
&= \left(\frac{x-y}{2} + \sqrt{\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4}}, -\frac{x-y}{2} + \sqrt{\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4}}\right) \\
&= \left(\frac{x-y}{2} + \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}}, -\frac{x-y}{2} + \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}}\right) \\
&= \left(\frac{x-y}{2} + \left|\frac{x+y}{2}\right|, -\frac{x-y}{2} + \left|\frac{x+y}{2}\right|\right) \\
&= \left(\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2}, -\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2}\right) \\
&= (x, y)\,.
\end{aligned}
$$

Also gilt $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$, d.h. f ist bijektiv und $f^{-1} = g$.

Aufgabe 4.

a) Es sei M die Menge aller TeilnehmerInnen, und es sei $f : M \to M$ die Abbildung

$$f(x) := \text{EmpfängerIn des Geschenkes von TeilnehmerIn } x.$$

Die Annahme, dass niemand mehr als ein Geschenk erhalten hat, bedeutet genau, dass f injektiv ist; da die Menge M sicherlich endlich ist, ist f damit aber automatisch auch surjektiv. Also erhält jede Person ein Geschenk.

b) Denken wir uns die Engel durchnumeriert als $e_1, e_2, e_3, \ldots$; bezeichnet E die Menge aller Engel, so bedeutet das, dass die Abbildung $\mathbb{N} \to E$, $n \mapsto e_n$, bijektiv ist. Betrachte dann die Abbildung $f : E \to E$, $e_n \mapsto e_{2n}$. Nehmen wir an, dass $f(e_n)$ der Empfänger des Geschenks von Engel e_n ist. Da f injektiv ist, bekommt kein Engel mehr als ein Geschenk; trotzdem bleiben unendlich viele Engel übrig und unbeschenkt, nämlich alle e_n mit *ungeradem* n.

Es kann also passieren, dass unendlich viele Engel unbeschenkt bleiben. (Trotzdem gibt es natürlich auch Fälle, in denen alle etwas bekommen, beispielsweise wenn jeder mit seinem Nachbarn ein Geschenk austauscht oder sich ganz einfach selbst beschenkt; ebenso kann es passieren, dass jeder *mehrere* Geschenke bekommt, ohne dass jemand dafür leer ausgehen müsste!)