

## 8. Übungsblatt

**Aufgabe 1 (4 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad f(x, y) = (2x - 3y, 3x - 6y)$$

bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrabbildung  $f^{-1} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  explizit an.

**Aufgabe 2 (6 Punkte)** Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g(y) = \sqrt{4 + y^2} + y.$$

a) Bestimmen Sie Abbildungsvorschrift der beiden Verknüpfungen

$$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und überprüfen Sie damit  $f$  auf Injektivität und Surjektivität.

b) Geben Sie  $M = f^{-1} \left( \left] -\infty, \frac{3}{2} \right] \right)$  mit Hilfe geeigneter Intervalle von  $\mathbb{R}$  an und skizzieren Sie  $M$  auf der Zahlengeraden.

**Aufgabe 3 (6 Punkte)** Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad f(x, y) = (x - y, xy)$$

und

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad g(u, v) = \left( \frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}}, -\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} \right).$$

Zeigen Sie, dass  $f$  bijektiv mit  $f^{-1} = g$  ist.

**Aufgabe 4: Weihnachtsaufgabe. (4 Punkte)**

a) Die Studentinnen und Studenten der Vorlesung „Grundlagen der Mathematik 1“ veranstalten in diesem Jahr ein Wichteln: Jede Person steckt einer anderen Person heimlich ein Weihnachtsgeschenk zu. Es sei bekannt, dass niemand mehr als ein Geschenk bekommen hat. Zeigen Sie, dass dann jeder Teilnehmer und jede Teilnehmerin ein Geschenk erhalten hat.

*(Anleitung: Man betrachte eine geeignete Abbildung.)*

b) Auch die himmlischen Engel wichteln in diesem Jahr untereinander, und auch bei ihnen erhält kein Engel mehr als ein Geschenk. Kann es passieren, dass ein Engel leer ausgeht? Kann es passieren, dass unendlich viele Engel leer ausgehen? (Bekanntlich gibt es genau so viele himmlische Engel, wie es natürliche Zahlen gibt, d.h. die Menge der Engel ist gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$ .)

Wenn Sie eine Korrektur wünschen, werfen Sie die Lösungen spätestens am **Freitag, 22. Dezember 2017, 14 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) ein. Bitte die Angabe des eigenen Namens und der Bezeichnung des bei der Anmeldung angegebenen Tutoriums nicht vergessen! Bitte heften Sie Ihre Lösung zusammen!