Mathematisches Institut der Universität München | Prof. Dr. D. Rost
Wintersemester 2017/18 | M. Jeblick, S. Aristarhov
Grundlagen der Mathematik I

Musterlösung des 7. Übungsblatts

Aufgabe 1.

a) Es sei $y \in f(f^{-1}(B))$; nach Definition von $f(\dots)$ bedeutet das, dass es ein $x \in f^{-1}(B)$ gibt mit $y = f(x)$. Nach Definition von $f^{-1}(B)$ ist dann aber $f(x) \in B$, und wegen $f(x) = y$ folgt $y \in B$. Also gilt $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

b) Beispielsweise kann man $M = \mathbb{N}$, $N = \mathbb{Z}$ und $B = \{-1\} \subset \mathbb{Z}$ wählen und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$ (die sogenannte „Einbettungsabbildung“). Dann ist $f^{-1}(B) = \emptyset$ und damit auch $f(f^{-1}(B)) = \emptyset \subsetneqq B$.

Ähnlich wie in Aufgabe 1 vom Tutoriumsblatt kann man ein solches Beispiel finden, indem man versucht, die Aussage „$B \subset f(f^{-1}(B))$“ zu beweisen. Dazu müssen wir also $y \in B$ als gegeben annehmen; um zu beweisen, dass y auch in $f(f^{-1}(B))$ läge, müßte erst einmal y *überhaupt* von der Abbildung f getroffen werden – und dafür gibt es im allgemeinen keinen Grund. Wir müssen also zur Konstruktion eines Gegenbeispiels nur die Mengen und die Abbildung so wählen, dass B ein Element besitzt, das nicht von f getroffen wird.

Aufgabe 2.

a) Die Abbildung f ist **injektiv**, denn aus $f(x_1) = f(x_2)$, also $3x_1 + 4 = 3x_2 + 4$, folgt sofort $3x_1 = 3x_2$ und damit $x_1 = x_2$. Die Abbildung f ist jedoch **nicht surjektiv**, denn für alle $x \in \mathbb{Z}$ ist $f(x) - 4 = 3x$ eine durch 3 teilbare Zahl. Für die Zahl $y := 5$ beispielsweise ist aber $y - 4 = 1$ *nicht* durch 3 teilbar, also kann es ein $x \in \mathbb{Z}$ geben mit $f(x) = 5$.

b) Die Abbildung g ist **injektiv** nach genau dem gleichen Argument wie in a). Aber g ist auch **surjektiv**, denn für jedes gegebene $y \in \mathbb{Q}$ ist $x := \frac{1}{3}(y - 4)$ ein Element von $\mathbb{Q}$ mit $g(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}(y - 4) + 4 = (y - 4) + 4 = y$.

c) Die Abbildung h ist **nicht injektiv**, denn es ist beispielsweise $h(1, 0) = 0 = h(0, 1)$. Aber h ist **surjektiv**, denn für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist beispielsweise $h(1, y) = y$.

d) Die Abbildung k ist **injektiv**, denn die Beziehung $k(x_1) = k(x_2)$, also $(x_1^2 + 1, (x_1 + 1)^2) = (x_2^2 + 1, (x_2 + 1)^2)$ bedeutet $x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$ sowie $(x_1 + 1)^2 = (x_2 + 1)^2$, also $x_1^2 + 2x_1 + 1 = x_2^2 + 2x_2 + 1$. Abziehen der ersten Gleichung liefert $2x_1 = 2x_2$, woraus $x_1 = x_2$ folgt.

Dagegen ist k **nicht surjektiv**, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 \geq 0$, also ist die erste Koordinate $x^2 + 1$ von $k(x)$ eine Zahl ≥ 1 (und die zweite Koordinate eine Zahl ≥ 0). Beispielsweise gibt es also kein $x \in \mathbb{R}$ mit $k(x) = (-1, 0)$.

Aufgabe 3. Wir bezeichnen Elemente von L mit $x_1, x_2, \dots$, Elemente von M mit $y_1, y_2, \dots$ und Elemente von N mit $z_1, z_2, \dots$. (Mathematisch ist eine solche Vereinbarung bedeutungslos, aber sie kann enorm helfen, nicht durcheinanderzukommen – ich empfehle sie für die eigene Arbeit wärmstens!)

a) Diese Aussage ist **falsch**. Ein Gegenbeispiel findet sich in Aufgabe 3 vom 7. Tutoriumsblatt; ein weiteres ist das folgende: Setze $L = N = \{0\}$ und $M = \mathbb{N}$, also

$$\{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \{0\}\,.$$

Dabei ist egal, welche Abbildung g genommen wird (für f gibt es ohnehin nur eine einzige Möglichkeit: alles geht auf 0). In jedem Fall ist $f \circ g = \mathrm{id}_{\{0\}}$ injektiv (sogar bijektiv), aber f ist nicht injektiv, da etwa $f(1) = 0 = f(2)$ ist.

b) Diese Aussage ist **wahr**. Zum Beweis seien $x_1, x_2 \in L$ mit $g(x_1) = g(x_2)$. Da wir nur etwas über $f \circ g$ wissen, liegt es nahe, auf die angenommene Gleichheit die Abbildung f anzuwenden: dann folgt also $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, d.h. $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$. Aber $f \circ g$ ist injektiv, und damit folgt $x_1 = x_2$, was zu zeigen war.

c) Diese Aussage ist **wahr**. Zum Beweis sei $z \in N$ vorgegeben. Wir wissen, dass die Abbildung $f \circ g : L \to N$ surjektiv ist; also gibt es ein $x \in L$ mit $z = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Mit $y := g(x)$ ist dann aber $z = f(y)$, d.h. wir haben ein Element von M gefunden, das durch f auf z abgebildet wird. Dies beweist die Surjektivität von f.

d) Diese Aussage ist **falsch**. Auch hierfür findet sich in Aufgabe 3 vom 7. Tutoriumsblatt ein Gegenbeispiel; unser unter a) angegebenes läßt sich jedoch auch hier dienbar machen: Denn $f \circ g$ ist bijektiv, also auch surjektiv, jedoch ist g nicht surjektiv (da ja nur ein einziges Element von $\mathbb{N}$ getroffen wird).

Aufgabe 4.

a) Da $\mathbb{N}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ist, können wir einfach folgende Abbildung definieren:

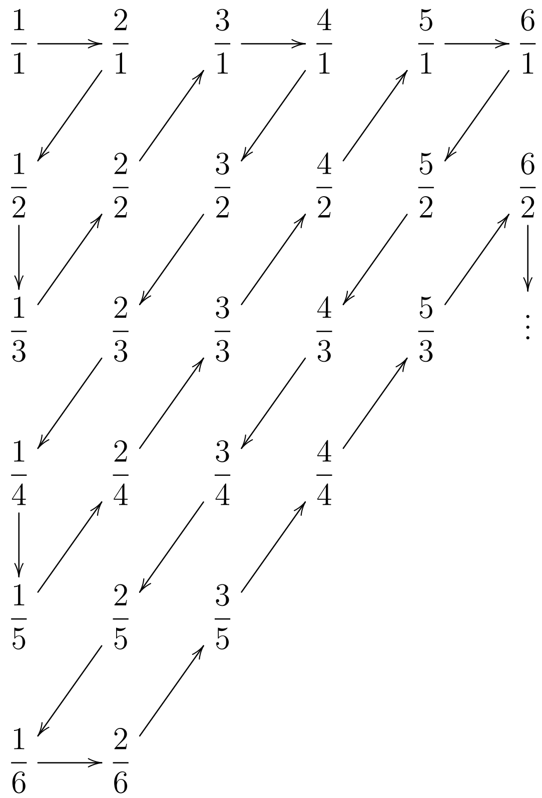
$$F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}, F(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{N} \\ 2015, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Dies ist offenbar eine wohldefinierte und surjektive Abbildung. Eine andere Möglichkeit wäre zum Beispiel

$$G : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}, G(x) = \lceil |x| \rceil.$$

Die Klammern mit Strichen oben bezeichnen hierbei das Aufrunden, d.h. in Formeln $\lceil a \rceil := \min\{n \in \mathbb{N} | n \geq a\}$ (die kleinste natürliche Zahl, die größer oder gleich a ist). Das ist auch eine wohldefinierte und surjektive Abbildung. Wir könnten sogar den Betrag weglassen, dann würden wir eben alle negativen Zahlen auf 1 abbilden - ganz egal.

b) Der gegebene Pfad



bricht offensichtlich niemals ab und erreicht in dieser unendlich nach rechts und unten fortgesetzten Tabelle jeden Bruch, d.h. die Funktion f ist surjektiv. Injektiv ist sie aber nicht, da in der Tabelle viele ungekürzte Brüche vorkommen. So ist zum Beispiel $f(1) = \frac{1}{1} = 1 = \frac{2}{2} = f(5)$.

c) **Eine Antwort in Worten:** Wir haben eine Abbildung von $\mathbb{N}$ auf alle positiven Brüche. Wir können sie so modifizieren, dass wir $f(1) = 0$ setzen und den Weg in obigem Bild (dann bei 2 beginnend) so durchschreiten, dass wir vor dem Weitergehen erst noch das Negative jedes Bruches abklappern. Als Wertetabelle:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$f(x)$	0	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	...

Es ist klar, dass dies eine surjektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ liefert.

Formelmäßiger Beweis (das gleiche wie oben, nur rigoroser): Auf dem Tutoriumsblatt haben wir schon eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ konstruiert, nennen wir sie $b : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$. Definieren wir eine Hilfsfunktion

$$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, h(z) := \begin{cases} f(z), \text{ falls } z > 0, \\ 0, \text{ falls } z = 0, \\ -f(|z|), \text{ falls } z < 0 \end{cases}$$

Dies ist eine wohldefinierte und surjektive Abbildung. Dann ist die Abbildung $g := h \circ b$ eine surjektive Abblidung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$. Noch formelmäßiger wäre folgende Variante, die auf dasselbe hinausläuft: Definiere $g(n) := \operatorname{sgn}(b(n)) \cdot f(|b(n)|)$.

d) Wir können dieselbe Konstruktion wie oben mit dem Zusatz wiederholen, dass wir ungekürzte Brüche bei unserem diagonalen Weg überspringen. Dann wird kein Bruch in $\mathbb{Q}$ mehrfach erreicht und wir erhalten eine bijektive Funktion zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$. Nach der Definition aus der Vorlesung haben die beiden Mengen dann dieselbe Mächtigkeit, es gilt

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|.$$

Dies enspricht natürlich nicht der Intuition, da $\mathbb{Q}$ in einem gewissen Sinne deutlich *mehr* Zahlen enthält als $\mathbb{N}$, aber bei unendlichen Mengen versagen eben solche intuitiven Vorstellungen.

Noch eine kleine Randbemerkung: Die reellen Zahlen sind, wie Cantor mit einem verwandten Trick beweisen konnte, nicht gleichmächtig zu $\mathbb{N}$, d.h. es kann keine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ geben. Das geht aber über den Horizont dieser Veranstaltung hinaus.