

Grundlagen der Mathematik I Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Wir zerlegen die Doppelungleichung in zwei einzelne Ungleichungen, deren Lösungsmengen wir dann schneiden.

- Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} < \frac{2x-1}{3-2x} &\iff 0 < \frac{2x-1}{3-2x} - \frac{1}{3} \\ &\iff 0 < \frac{6x-3}{9-6x} - \frac{3-2x}{9-6x} \\ &\iff 0 < \frac{6x-3-3+2x}{9-6x} \\ &\iff 0 < \frac{8x-6}{9-6x} \\ &\iff 0 < \frac{4x-3}{3-2x} \end{aligned}$$

Der Zähler $4x-3$ und der Nenner $3-2x$ wechseln an ihren Nullstellen $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{3}{2}$ ihr Vorzeichen, so dass wir die folgende Vorzeichentabelle anlegen:

	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	
$4x-3$	-	+	+
$3-2x$	+	+	-
$\frac{4x-3}{3-2x}$	-	+	-

Also gilt

$$\frac{1}{3} < \frac{2x-1}{3-2x} \iff 0 < \frac{4x-3}{3-2x} \iff x \in \left] \frac{3}{4}, \frac{3}{2} \right[.$$

- Ebenso gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{3-2x} < \frac{1}{2} &\iff \frac{2x-1}{3-2x} - \frac{1}{2} < 0 \\ &\iff \frac{4x-2}{6-4x} - \frac{3-2x}{6-4x} < 0 \\ &\iff \frac{4x-2-3+2x}{6-4x} < 0 \\ &\iff \frac{6x-5}{6-4x} < 0 \\ &\iff \frac{6x-5}{3-2x} < 0. \end{aligned}$$

Der Zähler $6x-5$ und der Nenner $3x-2$ wechseln an ihren Nullstellen $\frac{5}{6}$ bzw. $\frac{3}{2}$ ihr Vorzeichen; die Vorzeichentabelle lautet also

	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{2}$	
$6x - 5$	-	+	+
$3 - 2x$	+	+	-
$\frac{6x - 5}{3 - 2x}$	-	+	-

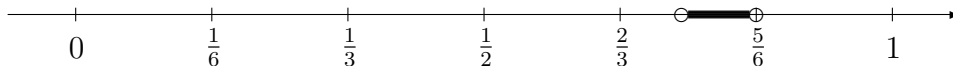
Damit gilt

$$\frac{2x - 1}{3 - 2x} < \frac{1}{2} \iff \frac{6x - 5}{3 - 2x} < 0 \iff x \in]-\infty, \frac{5}{6}[\cup]\frac{3}{2}, \infty[.$$

Setzen wir nun die Lösungen beider Ungleichungen zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned} x \in L_1 &\iff \frac{1}{3} < \frac{2x - 1}{3 - 2x} < \frac{1}{2} \\ &\iff x \in \left] \frac{3}{4}, \frac{3}{2} \right[\cap \left(]-\infty, \frac{5}{6}[\cup]\frac{3}{2}, \infty[\right) \\ &\iff x \in \left] \frac{3}{4}, \frac{5}{6} \right[, \end{aligned}$$

also $L_1 = \left] \frac{3}{4}, \frac{5}{6} \right[.$



b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} x \in L_2 &\iff |3x^2 - 8x - 7| \leq 4 \\ &\iff -4 \leq 3x^2 - 8x - 7 \leq 4 \end{aligned}$$

(für die zweite Äquivalenz vgl. Aufgabe 2 d) vom 6. Tutoriumsblatt). Wieder behandeln wir beide Ungleichungen dieser Ungleichungskette einzeln:

- Für die erste Ungleichung rechnen wir

$$\begin{aligned} -4 \leq 3x^2 - 8x - 7 &\iff 0 \leq 3x^2 - 8x - 3 \\ &\iff 0 \leq x^2 - \frac{8}{3}x - 1 \\ &\iff 0 \leq (x - 3) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

(die Faktorisierung im letzten Schritt erfolgt dabei an Hand des Satzes von Vieta, also Aufgabe 2 b) vom 4. Tutoriumsblatt). Die Vorzeichen-tabelle

	$-\frac{1}{3}$	3	
$x - 3$	-	-	+
$x + \frac{1}{3}$	-	+	+
$(x - 3) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$	+	-	+

zeigt nun

$$\begin{aligned} -4 \leq 3x^2 - 8x - 7 &\iff 0 \leq (x-3) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \\ &\iff x \in \left] -\infty, -\frac{1}{3} \right] \cup [3, \infty[. \end{aligned}$$

- Für die zweite Ungleichung lautet die gleiche Rechnung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x - 7 \leq 4 &\iff 3x^2 - 8x - 11 \leq 0 \\ &\iff 0 \leq x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{11}{3} \leq 0 \\ &\iff 0 \leq (x+1) \cdot \left(x - \frac{11}{3}\right). \end{aligned}$$

Die Vorzeichentabelle

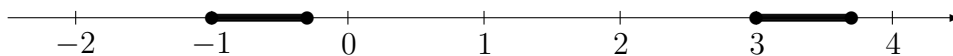
	-1	+	$\frac{11}{3}$
$x+1$	-	+	+
$x - \frac{11}{3}$	-	-	+
$(x+1) \cdot \left(x - \frac{11}{3}\right)$	+	-	+

liefert dann

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x - 7 \leq 4 &\iff 0 \leq (x+1) \cdot \left(x - \frac{11}{3}\right) \\ &\iff x \in \left[-1, \frac{11}{3}\right], \end{aligned}$$

Zusammensetzen beider Lösungen ergibt

$$L_2 = \left(\left] -\infty, -\frac{1}{3} \right] \cup [3, \infty[\right) \cap \left[-1, \frac{11}{3}\right] = \left[-1, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[3, \frac{11}{3}\right].$$



Aufgabe 2.

a) Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Ist $a \geq b$, so ist $\max\{a, b\} = a$ und $|a - b| = a - b$, also

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = \frac{1}{2} \cdot 2a = a = \max\{a, b\}.$$

- Ist $a \leq b$, so ist $\max\{a, b\} = b$ und $|a - b| = b - a$, also

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + b - a) = \frac{1}{2} \cdot 2b = b = \max\{a, b\}.$$

Die Behauptung stimmt also in beiden Fällen.

- b) Diese Aussage beweist man entweder genauso wie diejenige in a), oder man führt sie auf diese zurück. Das geht, indem man (Trick!) verwendet, da $\min \{a, b\} = -\max \{-a, -b\}$ ist: damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \min \{a, b\} &= -\max \{-a, -b\} \\ &\stackrel{\text{a)}}{=} -\frac{1}{2}(-a + (-b) + |-a - (-b)|) \\ &= \frac{1}{2}(a + b - |b - a|) \\ &= \frac{1}{2}(a + b - |a - b|), \end{aligned}$$

wie behauptet.

- c) Dies folgt direkt aus a) und b):

$$\begin{aligned} \max \{a, b\} - \min \{a, b\} &= \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) - \frac{1}{2}(a + b - |a - b|) \\ &= \frac{1}{2}(|a - b| + |a - b|) \\ &= |a - b|. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.

- a) Wie üblich, zeigen wir zwei Inklusionen:

- \subset . Es sei $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Dann gibt es ein $x \in A_1 \cup A_2$ mit $f(x) = y$. Dann ist also $x \in A_1$ oder $x \in A_2$; im ersten Fall folgt $y \in f(A_1)$, im zweiten $y \in f(A_2)$, und insgesamt folgt $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
- \supset . Es sei $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Dann gilt $y \in f(A_1)$ oder $y \in f(A_2)$. Im ersten Fall gibt es ein $x \in A_1$ mit $y = f(x)$, im zweiten Fall ein $x \in A_2$ mit $y = f(x)$. In beiden Fällen haben wir ein $x \in A_1 \cup A_2$ gefunden mit $y = f(x)$, also ist $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

- b) Es sei $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Dann gibt es ein $x \in A_1 \cap A_2$ mit $y = f(x)$. Wegen $x \in A_1$ folgt dann $y \in f(A_1)$, und wegen $x \in A_2$ folgt $y \in f(A_2)$. Insgesamt ist also $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Die bewiesene Inklusion kann aber tatsächlich *echt* sein. Sei beispielsweise die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die alles auf 0 abbildet, also $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $A_1 = \{1\}$ und $A_2 = \{2\}$ beispielsweise gilt dann $f(A_1) = \{0\} = f(A_2)$, also $f(A_1) \cap f(A_2) = \{0\}$, aber $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und damit $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$.

Ein solches Gegenbeispiel kann beispielsweise dadurch konstruiert werden, indem man versucht, die umgekehrte Inklusion zu beweisen, und sich klarmacht, woran man scheitert.

In diesem Fall könnte das so aussehen: Wir versuchen, die Behauptung „ $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ “ zu beweisen. Sei also $y \in N$ mit der Eigenschaft $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ vorgegeben. Wegen $y \in f(A_1)$ gibt es dann ein $x_1 \in A_1$ mit $y = f(x_1)$, und wegen $y \in f(A_2)$ gibt es auch ein $x_2 \in A_2$ mit $y = f(x_2)$. Weder von x_1 noch von x_2 weiß man aber, ob sie vielleicht in A_1 *und* A_2 liegen – das wüsste man nur, wenn man beispielsweise wüsste, dass $x_1 = x_2$ ist, aber dafür gibt es im allgemeinen keinen Grund; Dies bräuchten wir aber, um zu zeigen, da y das Bild eines Elements von $A_1 \cap A_2$ ist. Hieran scheitert also der Beweis, und entsprechend ist unser obiges Gegenbeispiel so konstruiert, dass A_1 und A_2 jeweils ein Element enthalten, das nicht in der anderen Menge liegt, die aber beide auf das gleiche Bild (hier 0) abgebildet werden.

Aufgabe 4.

a) Sei $y \in \mathbb{R}$ vorgegeben; zur Bestimmung von $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\}$ müssen wir die Gleichung

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

also

$$ax^2 + bx + c - y = 0$$

nach x auflösen. Hier gibt es nun mehrere Fälle:

(i) Ist $a \neq 0$, so liegt eine quadratische Gleichung mit Diskriminante $D = b^2 - 4a(c - y) = b^2 - 4ac + 4ay$ vor. Ihre Lösbarkeit hängt vom Vorzeichen von D ab; zu dessen Bestimmung ist es vorteilhaft, auch noch nach dem Vorzeichen von a zu unterscheiden:

- Ist $a > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} D \geq 0 &\iff b^2 - 4ac + 4ay \geq 0 \\ &\iff 4ay \geq 4ac - b^2 \\ &\iff y \geq c - \frac{b^2}{4a}, \end{aligned}$$

und eine ähnliche Rechnung zeigt, dass genau dann $D = 0$ ist, wenn $y = c - \frac{b^2}{4a}$ ist. Die Lösung der quadratischen Gleichung $y = f(x)$ ist nun

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a},$$

und damit ergibt sich

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } y < c - \frac{b^2}{4a}, \\ \left\{ \frac{-b}{2a} \right\} & \text{falls } y = c - \frac{b^2}{4a}, \\ \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a} \right\} & \text{falls } y > c - \frac{b^2}{4a}. \end{cases}$$

- Ist $a < 0$, so gilt

$$\begin{aligned} D \geq 0 &\iff b^2 - 4ac + 4ay \geq 0 \\ &\iff 4ay \geq 4ac - b^2 \\ &\iff y \leq c - \frac{b^2}{4a}, \end{aligned}$$

und wieder ist genau dann $D = 0$, wenn $y = c - \frac{b^2}{4a}$ ist. Die Lösung der quadratischen Gleichung $y = f(x)$ ist nun

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a},$$

und damit ergibt sich

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } y > c - \frac{b^2}{4a}, \\ \left\{ \frac{-b}{2a} \right\} & \text{falls } y = c - \frac{b^2}{4a}, \\ \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a} \right\} & \text{falls } y < c - \frac{b^2}{4a}. \end{cases}$$

- (ii) Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, so handelt es sich um eine lineare Gleichung $bx + c - y = 0$. Diese ist wegen $b \neq 0$ stets eindeutig nach x auflösbar, und zwar gilt

$$x = \frac{y - c}{b}$$

und damit

$$f^{-1}(\{y\}) = \left\{ \frac{y - c}{b} \right\} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

- (iii) Ist $a = b = 0$, so liegt die Gleichung $c - y = 0$ vor. Diese ist unlösbar für $y \neq c$ und stets erfüllt für $y = c$, so dass gilt:

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } y \neq c, \\ \mathbb{R} & \text{falls } y = c. \end{cases}$$

- b) Eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ liegt genau dann in der Wertemenge $f(\mathbb{R})$, wenn es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = y$, wenn also $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ ist. Wir müssen also nur in den oben diskutierten Fällen notieren, wann die Urbildmenge von $\{y\}$ nicht leer ist:

- (i) Ist $a > 0$, so ist $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $y \geq c - \frac{b^2}{4a}$ ist. Also ist $f(\mathbb{R}) = \left[c - \frac{b^2}{4a}, \infty \right[$.
- (ii) Ist $a < 0$, so ist $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $y \leq c - \frac{b^2}{4a}$ ist. Also ist $f(\mathbb{R}) = \left] -\infty, c - \frac{b^2}{4a} \right]$.
- (iii) Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, so sind $f^{-1}(\{y\})$ immer nichtleer, also folgt $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- (iv) Ist $a = b = 0$, so ist $f^{-1}(\{y\})$ nur für $y = c$ nichtleer, so dass $f(\mathbb{R}) = \{c\}$ gilt.