Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2017/18
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

Musterlösung des 5. Übungsblatts

Aufgabe 1.

a) Wir formen den Term $x^2 + 2px + q$ mittels Quadratischer Ergänzung um:

$$\begin{aligned} x^2 + 2px + q &= x^2 + 2px + p^2 + q - p^2 \\ &= (x+p)^2 - (p^2 - q) \\ &= (x+p)^2 - w^2 \qquad \text{(3. Binomische Formel)} \\ &= (x+p+w) \cdot (x+p-w). \end{aligned}$$

Es ist also genau dann $x^2 + 2px + q = 0$, wenn $(x+p+w) \cdot (x+p-w) = 0$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn einer der beiden Faktoren verschwindet: Also im Fall $x + p + w = 0$, d.h. $x = -p - w$, und im Fall $x + p - w = 0$, d.h. $x = -p + w$.

b) Die Gleichung $x^2 + 10x + 21 = 0$ hat die Form $x^2 + 2px + q = 0$ mit $p = 5$ und $q = 21$. Tatsächlich ist $p^2 - q = 25 - 21 = 4 = 2^2$, wir können also in Teilaufgabe a) $w = 2$ setzen und erhalten dann, dass genau dann $x^2 + 10x + 21 = 0$ ist, wenn $x = -p + w = -5 + 2 = -3$ oder $x = -p - w = -5 - 2 = -7$ ist. Die Lösungsmenge der Gleichung ist also $L = \{-3, -7\}$.

Aufgabe 2. Wir formen die Ausgangsgleichung so um, wie im Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 vom 5. Tutoriumsblatt erläutert:

$$\begin{aligned} & & \sqrt{x+2} + \sqrt{3x-5} = 7 \qquad &\text{(Wurzeln trennen)} \\ &\iff & \sqrt{x+2} = 7 - \sqrt{3x-5} \qquad &\text{(quadrieren)} \\ (!!) &\implies & x + 2 = (7 - \sqrt{3x-5})^2 \qquad &\text{(binomische Formel)} \\ &\iff & x + 2 = 49 + 3x - 5 - 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{3x-5} & \\ &\iff & x + 2 = 3x + 44 - 14 \cdot \sqrt{3x-5} \qquad &\text{(Wurzel isolieren)} \\ &\iff & 14 \cdot \sqrt{3x-5} = 42 + 2x & \\ &\iff & 7\sqrt{3x-5} = 21 + x \qquad &\text{(erneut quadrieren)} \\ (!!) &\implies & 49 \cdot (3x - 5) = (21 + x)^2 & \\ &\iff & 147x - 245 = 441 + x^2 + 42x & \\ &\iff & x^2 - 105x + 686 = 0. & \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $x = 7$ und $x = 98$. Beide liegen im Intervall $[\frac{5}{3}, \infty[$, sind also prinzipiell zulässig. Setzen wir sie in die Ausgangsgleichung ein, erhalten wir für $x = 7$

$$\sqrt{7+2} + \sqrt{3 \cdot 7 - 5} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7,$$

also ist $x = 7$ eine Lösung; für $x = 98$ erhalten wir dagegen

$$\sqrt{98+2} + \sqrt{3 \cdot 98 - 5} = \sqrt{100} + \sqrt{289} = 10 + 17 = 27 \neq 7,$$

also ist $x = 98$ keine Lösung der Ausgangsgleichung. Die Lösungsmenge ist also $L = \{7\}$.

Aufgabe 3.

a) Nach Definition ist K eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Da sich jede Zahl $a \in \mathbb{Q}$ schreiben lässt als $a = a + 0 \cdot \sqrt{2} \in K$, gilt auch $\mathbb{Q} \subset K$. Da auf dem Übungsblatt schon gezeigt wurde, dass Summen, Produkte und Negative von Elementen von K wieder in K liegen, liefert die „gewöhnliche" Addition und Multiplikation sinnvolle Verknüpfungen auf der Menge K.

   Wegen $0, 1 \in \mathbb{Q} \in K$ sind neutrale Elemente für beide Verknüpfungen in K enthalten, und da $\mathbb{R}$ ein Körper ist, gelten in K all diejenigen Körperaxiome (weil sie in $\mathbb{R}$ gelten), die nicht die *Existenz* von Objekten fordern: Die Assoziativität von $+$ beispielsweise gilt in K, weil sie in $\mathbb{R}$ gilt; die Existenz von multiplikativen Inversen dagegen ist nicht klar: Ist $0 \neq a \in K$, so gibt es zwar in $\mathbb{R}$ ein Element a^{-1}, aber von diesem ist nicht klar, ob es wieder in K liegt.

   Automatisch übertragen sich also von $\mathbb{R}$ auf K die Assoziativität und Kommutativität beider Verknüpfungen sowie die Distributivität. Die Existenz neutraler Elemente haben wir schon festgestellt, ebenso die von inversen Elementen bezüglich $+$.

b) Die angegebene Formel ergibt sich aus der dritten binomischen Formel:

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right) = a^2 - (b\sqrt{2})^2 = a^2 - 2b^2.$$

   Der Knackpunkt ist nun, dass $a^2 - 2b^2$ stets in $\mathbb{Q}$ liegt (dies folgt sofort aus $a, b \in \mathbb{Q}$), und sofern $a + b\sqrt{2} \neq 0$ ist, ist auch $a^2 - 2b^2 \neq 0$: Denn andernfalls wäre $a^2 = 2b^2$; da nicht a und b beide null sind (sonst wäre $a + b\sqrt{2} = 0$), müssen sie aufgrund dieser Gleichung beide von Null verschieden sein. Dann folgt aber $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, also wäre $\frac{a}{b}$ eine rationale Zahl mit Quadrat 2, und eine solche gibt es laut Vorlesung nicht.

   Damit kann man aber eine Formel für multiplikative Inverse angeben: Für $0 \neq a + b\sqrt{2} \in K$ gilt

$$1 = \frac{1}{a^2 - 2b^2}\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right) = \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}\right),$$

   also

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}\right),$$

   und dies ist ein Element von K.

c) In a) haben wir alle Körperaxiome nachgewiesen bis auf die Existenz multiplikativer Inverser; diese folgte in b), und damit ist K ein Körper.

Aufgabe 4.

a) Die Ungleichungskette (die rechte Hälfte derer, die wir beweisen wollen)

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq b^2.$$

   folgt durch Quadrieren aus der Ungleichungskette

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b,$$

in der die erste Ungleichung die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel ist (Aufgabe 1 c) vom 2. Tutoriumsblatt) und die zweite („der Durchschnitt liegt unter dem größeren Wert“) in Aufgabe 3 b) vom 5. Tutoriumsblatt gezeigt wurde.[1]

Bilden wir nun von der schon bewiesenen Ungleichungskette die Kehrwerte, so erhalten wir

$$\frac{1}{b^2} \leq \left(\frac{2}{a+b}\right)^2 \leq \frac{1}{ab}.$$

Multiplizieren wir nun alles mit $(ab)^2$ (dies ist ja eine positive Zahl!), so folgt

$$a^2 \leq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leq ab,$$

und dies ist genau die fehlende Hälfte der behaupteten Ungleichungskette.

b) Diese Ungleichung ergibt sich durch folgende Umformungskette aus der Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \\
\Longrightarrow\quad & \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} \leq a+b \\
\Longrightarrow\quad & a+b+2\sqrt{ab} \leq 2(a+b) \quad \text{(binomische Formel)} \\
\Longrightarrow\quad & (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leq 2(a+b) \\
\overset{(*)}{\Longrightarrow}\quad & \sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2}\cdot\sqrt{a+b} \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a+b} \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{a+b} \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}}
\end{aligned}$$

Dabei wurde in $(*)$ verwendet, dass für $x, y > 0$ aus $x \leq y$ bereits $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ folgt. Dies beweist man durch Kontraposition, denn es ist schon bekannt, dass umgekehrt aus $\sqrt{x} > \sqrt{y}$ durch Quadrieren folgt $x > y$.

[1] Beim Quadrieren einer Ungleichung verwenden wir die Rechenregel $0 \leq a \leq b \Longrightarrow a^2 \leq b^2$, die sich aus der Ungleichungskette $a^2 = a\cdot a \leq a\cdot b \leq b \cdot b = b^2$ ergibt.