

5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (6 Punkte) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

- a) Es seien $p, q \in K$ gegeben, und es sei bekannt, daß es ein $w \in K$ gibt mit $p^2 - q = w^2$. Zeigen Sie, dass dann für alle $x \in K$ gilt:

$$x^2 + 2px + q = 0 \iff x = -p + w \text{ oder } x = -p - w.$$

(Bemerkung: Dies ist im Wesentlichen eine Version der aus der Schule bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen, die über jedem Körper funktioniert. Zum Beweis darf die Lösungsformel aber nicht verwendet werden!)

- b) Lösen Sie für $K = \mathbb{Q}$ die Gleichung $x^2 + 10x + 21 = 0$ mit Hilfe von a).

Aufgabe 2 (5 Punkte) Man bestimme die Elemente der Menge

$$L = \left\{ x \in \left[\frac{5}{3}, \infty \right[\mid \sqrt{x+2} + \sqrt{3x-5} = 7 \right\}.$$

Dabei dürfen Schulkenntnisse über das Rechnen mit Wurzeln verwendet werden.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Für den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ betrachten wir die Teilmenge $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Auf dem 5. Tutoriumsblatt, Aufgabe 4, wurde schon gezeigt, dass für $x, y \in K$ auch $x + y$, $x \cdot y$ sowie $-x$ in K liegen.

- a) Zeigen Sie $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$ und überlegen Sie, welche Körperaxiome von \mathbb{R} sich auf K übertragen.
- b) Bestätigen Sie

$$(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$$

für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ und zeigen Sie damit, dass für alle $x \in K \setminus \{0\}$ auch $\frac{1}{x}$ in K liegt.

- c) Begründen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a \leq b$:

$$a^2 \leq \left(\frac{2ab}{a+b} \right)^2 \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq b^2.$$

- b) Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}}.$$

Wenn Sie eine Korrektur wünschen, werfen Sie die Lösungen spätestens am **Freitag, 1. Dezember 2017, 14 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) ein. Bitte die Angabe des eigenen Namens und der Bezeichnung des bei der Anmeldung angegebenen Tutoriums nicht vergessen! Bitte heften Sie Ihre Lösung zusammen!