Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2017/18
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

Musterlösung des 4. Übungsblatts

Aufgabe 1.

a) Für die Summen:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{(-2)^{k+1}}{k^2} = \frac{(-2)^2}{1^2} = 4,$$
$$\sum_{k=1}^{2} \frac{(-2)^{k+1}}{k^2} = 4 + \frac{(-2)^3}{2^2} = 4 + \frac{-8}{4} = 2,$$
$$\sum_{k=1}^{3} \frac{(-2)^{k+1}}{k^2} = 2 + \frac{(-2)^4}{3^2} = 2 + \frac{16}{9} = \frac{34}{9},$$
$$\sum_{k=1}^{4} \frac{(-2)^{k+1}}{k^2} = \frac{34}{9} + \frac{(-2)^5}{4^2} = \frac{34}{9} + \frac{-32}{16} = \frac{16}{9}.$$

Für die Produkte:

$$\prod_{k=1}^{1} \frac{2k}{5k+2} = \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7},$$
$$\prod_{k=1}^{2} \frac{2k}{5k+2} = \frac{2}{7} \cdot \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2 + 2} = \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{12} = \frac{2}{21},$$
$$\prod_{k=1}^{3} \frac{2k}{5k+2} = \frac{2}{21} \cdot \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3 + 2} = \frac{2}{21} \cdot \frac{6}{17} = \frac{4}{119},$$
$$\prod_{k=1}^{4} \frac{2k}{5k+2} = \frac{4}{119} \cdot \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4 + 2} = \frac{4}{119} \cdot \frac{8}{22} = \frac{16}{1309}.$$

b) Um die wechselnden („alternierenden“) Vorzeichen bei der Summe in den Griff zu bekommen, schreiben wir sie um als

$$\frac{1}{1^3} + \frac{(-1)}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{(-1)}{10^3}.$$

Im k-ten Summanden hat der **Nenner** die Form k^3. Für die Behandlung der **Zähler** brauchen wir eine Möglichkeit, die Folge von Zahlen

$$a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1,\ \ldots$$

formelmäßig auszudrücken. Dafür gibt es einen Standardtrick, der sich folgendermaßen herleiten lässt: Jede dieser Zahlen ist das (-1)-Fache der vorangehenden, also gilt

$$a_1 = 1,\ a_2 = (-1) \cdot a_1 = -1,\ a_3 = (-1) \cdot a_2 = (-1)^2,\ a_4 = (-1) \cdot a_3 = (-1)^3,\ \ldots$$

und allgemein $a_k = (-1)^{k-1}$. Damit lässt sich der k-te Summand schreiben als $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^3}$, und die gesamte Summe ist damit

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3}.$$

Beim Produkt durchlaufen die Zähler genau die geraden Zahlen zwischen 2 und 60, also die Zahlen $2k$ für $k = 1, \dots, 30$. Der Nenner wächst in jedem Glied um 3 an, wird also den Ausdruck $3k$ beinhalten; genauer ist er immer um 2 größer als $3k$, hat also die Form $3k + 2$ (man kann darauf auch kommen, indem man sich fragt, wie wohl ein – hier nicht auftauchender – „nullter" Bruch aussähe: Er hätte sicher den Nenner 2). Die Faktoren haben demnach die Form $\frac{2k}{3k+2}$ für $k = 1, \dots, 30$, und das Produkt ist

$$\prod_{k=1}^{30} \frac{2k}{3k+2}.$$

c) Wir schreiben Variablen für die beiden Fragezeichen und also Zahlen A und B derart, dass

$$\frac{1}{k^2+k} \overset{!}{=} \frac{A}{k} - \frac{B}{k+1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Vielleicht findet man schon durch Probieren eine Lösung; systematisch geht es so: Durch Bringen auf den Hauptnenner erhalten wir

$$\frac{A}{k} - \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1) - Bk}{k \cdot (k+1)} = \frac{(A-B)k + A}{k^2+k},$$

so dass wir sicher dann fertig sind, wenn wir A und B so wählen können, dass $(A-B)k + A = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Dies ist dann der Fall, wenn $B = A$ ist (dann verschwindet der erste Summand) und außerdem $A = 1$, also insgesamt für $A = B = 1$. Halten wir also fest: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Damit entpuppt sich die angegebene große Summe als Teleskopsumme ähnlich dem Teleskopprodukt aus Aufgabe 1 c) vom Tutoriumsblatt: Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k^2+k} &= \sum_{k=1}^{999} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{1+k} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}\right) \\
&= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \dots + \cancel{\frac{1}{999}} - \frac{1}{1000} \\
&= 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.

a) Die **Kommutativität**, die **Existenz neutraler Elemente** und die **Existenz inverser Elemente zu jedem Element** kann man für Addition und Multiplikation direkt an den Verknüpfungstafeln ablesen, wie es im Lösungsvorschlag zum 5. Tutoriumsblatt, Aufgabe 1, beschrieben ist. (Kommutativität zeigt sich an der Spiegelsymmetrie der Tabelle, die

Existenz eines neutralen Elementes an der Existenz einer Zeile oder Spalte, die identisch zur Beschriftungszeile oder -spalte ist, die Existenz von inversen Elementen daran, daß in jeder Zeile oder Spalte – außer, im Falle der Multiplikationstafel, der zu $\overline{0}$ gehörigen – irgendwo das neutrale Element auftaucht.)

Die übrigen Eigenschaften sind, wie immer, mühsamer:

- Für die **Assoziativität der Addition** ist für alle $a, b, c \in K$ die Gleichung

  $$a + (b + c) = (a + b) + c$$

  zu überprüfen. Da K drei Elemente hat, sind dies $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ zu überprüfende Gleichungen. Genau wie im Lösungsvorschlag zum 5. Tutoriumsblatt, Aufgabe 1, erklärt, sind die Fälle, daß eine der Variablen den Wert $\overline{0}$ hat oder alle drei identisch sind, ohne Blick in die Verknüpfungstabelle immer unproblematisch. Anders als bei jener Aufgabe bleiben nun aber immer noch sechs zu überprüfende Gleichungen übrig, nämlich:

  $$\begin{array}{ll} \overline{2} + (\overline{2} + \overline{1}) \stackrel{?}{=} (\overline{2} + \overline{2}) + \overline{1} & \qquad \overline{1} + (\overline{2} + \overline{2}) \stackrel{?}{=} (\overline{1} + \overline{2}) + \overline{2} \\ \overline{2} + (\overline{1} + \overline{1}) \stackrel{?}{=} (\overline{2} + \overline{1}) + \overline{1} & \qquad \overline{1} + (\overline{1} + \overline{2}) \stackrel{?}{=} (\overline{1} + \overline{1}) + \overline{2} \\ \overline{1} + (\overline{2} + \overline{1}) \stackrel{?}{=} (\overline{1} + \overline{2}) + \overline{2} & \\ \overline{2} + (\overline{1} + \overline{2}) \stackrel{?}{=} (\overline{2} + \overline{1}) + \overline{2}. & \end{array}$$

  Ein letzter Vereinfachungsschritt besteht nun noch in der Beobachtung, daß aufgrund der (schon bewiesenen) Kommutativität der Addition Gleichungen, die in der gleichen Zeile abgedruckt sind, zueinander äquivalent sind.

  Es sind also nur die vier untereinander stehenden Gleichungen der linken Spalte zu überprüfen, und hier nun ist endlich die Verknüpfungstabelle zu Rate zu ziehen: Sie zeigt, daß alle vier Gleichungen tatsächlich richtig sind. Für die beiden unteren Gleichungen erkennt man das daran, daß $\overline{1} + \overline{2} = \overline{0}$ ist; für die ersten beiden Gleichungen muß man den gemeinsamen Wert beider Seiten ($\overline{2}$ für die erste und $\overline{1}$ für die zweite Gleichung) ermitteln.

- Für die **Assoziativität der Multiplikation** ist für alle $a, b, c \in K$ die Gleichung

  $$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

  zu überprüfen. Genau wie bei der Assoziativität der Addition sind die Fälle klar, in denen eine der Variablen den Wert $\overline{1}$ hat oder alle drei Variablen den gleichen Wert haben. Da außerdem an der Multiplikationstabelle abzulesen ist, daß $\overline{0} \cdot a = \overline{0}$ für alle $a \in K$ ist, erledigen sich auch alle Fälle, in denen eine der Variablen den Wert $\overline{0}$ hat, automatisch. Damit sind aber alle Fälle abgedeckt: Denn wenn keine der Variablen den Wert $\overline{0}$ oder $\overline{1}$ hat, so ist $a = b = c = \overline{2}$, und auch diesen Fall haben wir bereits erledigt.

- Für die **Distributivität** ist für alle $a, b, c \in K$ die Gültigkeit der Gleichung

  $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

  zu überprüfen. Von diesen 27 Gleichungen können wiederum die meisten durch allgemeine Überlegungen erledigt werden: Ist $a = \overline{1}$, so ist die Gleichung stets erfüllt, da beide Seiten den Wert $b + c$ ergeben. Hat eine der Variablen den Wert $\overline{0}$, so ist sie ebenfalls erfüllt nach dem gleichen Argument wie auf dem Tutoriumsblatt. Es bleibt also für a nur noch der Wert $\overline{2}$ übrig, und für $\overline{b}$ und $\overline{c}$ jeweils die Werte $\overline{1}$ oder $\overline{2}$. Es sind also nur noch vier Gleichungen zu überprüfen, nämlich:

$$\overline{2}\cdot(\overline{1}+\overline{1}) \stackrel{?}{=} \overline{2}\cdot\overline{1}+\overline{2}\cdot\overline{1}$$

$$\overline{2}\cdot(\overline{2}+\overline{1}) \stackrel{?}{=} \overline{2}\cdot\overline{2}+\overline{2}\cdot\overline{1} \qquad \overline{2}\cdot(\overline{1}+\overline{2}) \stackrel{?}{=} \overline{2}\cdot\overline{1}+\overline{2}\cdot\overline{2}$$

$$\overline{2}\cdot(\overline{2}+\overline{2}) \stackrel{?}{=} \overline{2}\cdot\overline{2}+\overline{2}\cdot\overline{2}$$

Wieder sind die beiden in einer Zeile geschriebenen Gleichungen aufgrund der Kommutativität der Addition äquivalent; die Gültigkeit der drei verbliebenen Gleichungen überprüft man anhand der Verknüpfungstabellen (die gemeinsamen Werte beider Seiten sind der Reihe nach $\overline{1}$, $\overline{0}$, $\overline{2}$).

Uff. Die Mühsamkeit dieses Verfahrens (und das unklare Zustandekommen der Verknüpfungstafeln) sind Grund genug, nach besseren Konstruktionsmöglichkeiten für endliche Körper zu suchen. Wir werden im Laufe der Vorlesung darauf zurückkommen.

b) Auf dem Körper K kann man **keine** vernünftige Anordnung $\succ$ definieren. Denn es müsste laut Vorlesung bzw. letztem Tutoriumsblatt auf jeden Fall gelten

$$\overline{1} \succ \overline{0},$$

und wegen des Monotoniegesetzes der Addition dann auch

$$\overline{1}+\overline{1} \succ \overline{0}+\overline{1} \Longrightarrow \overline{2} \succ \overline{1}.$$

Wieder mit dem Monotoniegesetz der Addition folgt dann

$$\overline{2}+\overline{1} \succ \overline{1}+\overline{1} \Longrightarrow \overline{0} \succ \overline{2},$$

aber gleichzeitig gilt wegen der Transitivität, dass

$$\overline{1} \succ \overline{0} \wedge \overline{2} \succ \overline{1} \Longrightarrow \overline{2} \succ \overline{0}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Gleichung davor! Das zeigt, dass sich keine Anordnung auf K definieren lässt (dies gilt übrigens für jeden Körper mit endlich vielen Elementen).

c) $(M,+,\cdot)$ ist kein Körper, da das Distributivgesetz nicht erfüllt ist; beispielsweise ist

$$A\cdot(B+B) = A\cdot A = B,$$

aber

$$A\cdot B + A\cdot B = D + D = A.$$

(Interessanterweise sind jedoch alle anderen Axiome eines Körpers erfüllt: Addition und Multiplikation sind assoziativ und kommutativ, C ist Nullelement und D ist Einselement, in jeder Zeile/Spalte der Additionstabelle taucht einmal C auf, und in jeder Zeile/Spalte der Multiplikationstabelle außer der zu C gehörigen taucht einmal D auf.)

Aufgabe 3.

a) Es ist
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = a\cdot b^{-1}\cdot c\cdot d^{-1} = a\cdot c = d^{-1}\cdot b^{-1} = (a\cdot c)\cdot(b\cdot d)^{-1} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d},$$
denn es ist $(b\cdot d)^{-1} = d^{-1}\cdot b^{-1}$ (vgl. Lösungsvorschlag zum 4. Tutoriumsblatt, Aufgabe 3 a)).

b) Es ist
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} \overset{\text{a)}}{=} \frac{a\cdot d}{b\cdot c},$$
denn es ist $\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{c}$ wegen
$$\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c} \overset{\text{a)}}{=} \frac{c\cdot d}{c\cdot d} = 1$$
und der Eindeutigkeit von Inversen. (Natürlich ist auch ein direkter Beweis von b) ohne Rückgriff auf a) möglich.)

Aufgabe 4. Um beide Seiten der Gleichung sinnvoll miteinander vergleichen zu können, bringen wir sie auf einen gemeinsamen Nenner. Damit die Terme nicht zu groß werden, sollte man beachten, dass $9 - x^2 = 3^2 - x^2 = (3-x)\cdot(3+x)$ ist, dass also als gemeinsamer Nenner bereits $9 - x^2$ ausreicht (und nicht etwa $(9-x^2)\cdot(3-x)\cdot(3+x)$ benötigt wird).
Wegen
$$\frac{x}{3-x} - \frac{x^2+9}{9-x^2} = \frac{x\cdot(3+x)}{(3-x)\cdot(3+x)} - \frac{x^2+9}{9-x^2} = \frac{3x+x^2-x^2-9}{9-x^2} = \frac{3x-9}{9-x^2}$$
und
$$1 - \frac{x}{3+x} = \frac{9-x^2}{9-x^2} - \frac{x\cdot(3-x)}{(3+x)\cdot(3-x)} = \frac{9-x^2-3x+x^2}{9-x^2} = \frac{9-3x}{9-x^2}$$
gilt also für $x \in \mathbb{Q}\setminus\{-3,3\}$:
$$\begin{aligned} & \frac{x}{3-x} - \frac{x^2+9}{9-x^2} = 1 - \frac{x}{3+x} \\ \iff\quad & \frac{3x-9}{9-x^2} = \frac{9-3x}{9-x^2} \\ \iff\quad & 3x - 9 = 9 - 3x \\ \iff\quad & 6x = 18 \\ \iff\quad & x = 3. \end{aligned}$$

Da $x = 3$ aber nicht in $\mathbb{Q}\setminus\{-3,3\}$ liegt, ist damit $L = \emptyset$.