Mathematisches Institut der Universität München | Prof. Dr. D. Rost
Wintersemester 2017/18 | M. Jeblick, S. Aristarhov
Grundlagen der Mathematik I

4. Übungsblatt

Aufgabe 1 ***(5 Punkte)***

a) Bestimmen Sie für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{k+1}}{k^2} \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{5k+2}.$$

b) Schreiben Sie

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - + \ldots - \frac{1}{10^3} \quad \text{und} \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{11} \cdot \ldots \cdot \frac{60}{92}$$

mit Hilfe des Summen- bzw. Produktzeichens.

c) Vervollständigen Sie die Aussage

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{?}{k} - \frac{?}{k+1}$$

so, dass sie für alle $k \in \mathbb{N}$ gültig wird, und bestimmen Sie dann den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k^2+k}.$$

Aufgabe 2 ***(7 Punkte)***

a) Auf der Menge $K = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ wird eine Addition $+$ sowie eine Multiplikation $\cdot$ definiert durch Angabe der Verknüpfungstabellen

$$\begin{array}{c|ccc} + & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \end{array}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit Nullelement $\overline{0}$ und Einselement $\overline{1}$ ist.

(Zum Erwerb der Punkte genügt es, wenn von den drei Eigenschaften „Assoziativität von $+$“, „Assoziativität von $\cdot$“ und „Distributivität“ nur *eine* bewiesen wird.)

b) Ist es möglich, eine Anordnung $\succ$ zu definieren, die obigen Körper zu einem angeordneten Körper $(K, +, \cdot, \succ)$ macht? (Begründung!)

c) Auf der Menge $M = \{A, B, C, D\}$ wird eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ über die Verknüpfungstabellen

$$\begin{array}{c|cccc} + & A & B & C & D \\ \hline A & C & D & A & B \\ B & D & A & B & C \\ C & A & B & C & D \\ D & B & C & D & A \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cccc} \cdot & A & B & C & D \\ \hline A & B & D & C & A \\ B & D & A & C & B \\ C & C & C & C & C \\ D & A & B & C & D \end{array}$$

definiert. Beweisen Sie, dass $(M, +, \cdot)$ kein Körper ist! *Hinweis: Wenn Sie mehr als ein paar Zeilen dafür schreiben müssen, sind Sie auf dem falschen Weg!*

Aufgabe 3 ***(4 Punkte)*** Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$:

a) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$

b) $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$ falls $c \neq 0$.

Aufgabe 4 ***(4 Punkte)*** Geben Sie die Elemente der folgenden Menge an:

$$L = \left\{ x \in \mathbb{Q} \setminus \{-3, 3\} \;\middle|\; \frac{x}{3-x} - \frac{x^2+9}{9-x^2} = 1 - \frac{x}{3+x} \right\}.$$

Wenn Sie eine Korrektur wünschen, werfen Sie die Lösungen spätestens am **Freitag, 24. November 2017, 14 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) ein. Bitte die Angabe des eigenen Namens und der Bezeichnung des bei der Anmeldung angegebenen Tutoriums nicht vergessen! Bitte heften Sie Ihre Lösung zusammen!