

Grundlagen der Mathematik I – 3. Übungsblatt

Aufgabe 1. (5 Punkte) Es seien M und N Mengen.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gleichwertig sind:

- (i) $M \cap N = M$.
- (ii) $M \cup N = N$.
- (iii) $M \setminus N = \emptyset$.
- (iv) $M \subset N$.

b) Geben Sie eine zu $M \subsetneq N$ gleichwertige Aussage unter Verwendung der Mengen $N \setminus M$ und $M \setminus N$ an (mit Begründung!).

Aufgabe 2. (5 Punkte) Für zwei Mengen A, B ist die *symmetrische Differenz* $A \Delta B$ definiert als $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

a) Schreiben Sie die Menge $A \Delta B$ in der Form $\{x \mid P(x)\}$ und verwenden Sie bei der Formulierung der Aussage $P(x)$ die logischen Zeichen \wedge und \vee .

b) Zeigen Sie, dass für Mengen A, B, C gilt:

- (i) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- (ii) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.
- (iii) $(A \cap B) \Delta C \supset (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$.

Machen Sie sich die Mengen jeweils auch an einer Zeichnung anschaulich.

Gilt in (iii) auch Gleichheit?

Aufgabe 3. (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- a) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a \cdot b \text{ ist ungerade} \implies a + b \text{ ist gerade})$
- b) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : ((a + b \text{ und } a \cdot b \text{ sind gerade}) \implies (a \text{ und } b \text{ sind gerade}))$
- c) $\forall a \in \mathbb{Z} \exists b \in \mathbb{Z} \forall c \in \mathbb{Z} : (a + b) \cdot c \text{ ist gerade}$
- d) $\exists a \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z} \exists c \in \mathbb{Z} : (a + b) \cdot c \text{ ist gerade}$

Aufgabe 4. (5 Punkte) Es seien A und B Mengen.

- a) Zeigen Sie $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.
- b) Geben Sie Beispiele für A und B mit $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subsetneq \mathcal{P}(A \cup B)$ an.
- c) Zeigen Sie $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

Wenn Sie eine Korrektur wünschen, werfen Sie die Lösungen spätestens am **Freitag, 17. November 2017, 14 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) ein. Bitte die Angabe des eigenen Namens und der Bezeichnung des bei der Anmeldung angegebenen Tutoriums nicht vergessen! Bitte heften Sie Ihre Lösung zusammen!