Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2017/18
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

Musterlösung des 2. Übungsblatts

Aufgabe 1

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Wir müssen die Richtigkeit der Aussage

$$P: \quad \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$$

beweisen. Es ist

$$\begin{aligned} & 0 \leq (a-b)^2 \\ \iff & 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \\ \iff & 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\ \iff & \frac{4ab}{a+b} \leq a+b \\ \iff & \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

aber da

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}} = \frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

ist, ist damit die Aussage P bewiesen.

b) Die durchschnittliche Geschwindigkeit ist der Wert

$$\frac{\text{insgesamt zurückgelegte Strecke}}{\text{insgesamt benötigte Zeit}}.$$

In der ersten Stunde, in der er mit a km/h gefahren ist, hat der Fahrradfahrer a km zurückgelegt, entsprechend in der zweiten Stunde b km. Seine durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt also

$$\frac{a \text{ km} + b \text{ km}}{2 \text{ h}} = \frac{a+b}{2} \text{ km/h}.$$

c) Wir kennen die Länge der Strecke den Berg hinauf nicht, also bezeichnen wir sie mit einer Variable, s km. Wegen

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}} \quad \implies \quad \text{Zeit} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Geschwindigkeit}}$$

benötigt der Fahrradfahrer für die Fahrt aufwärts dann eine Zeit von

$$\frac{s \text{ km}}{a \text{ km/h}} = \frac{s}{a} \text{ h}$$

und für die Fahrt abwärts entsprechend eine Zeit von

$$\frac{s \text{ km}}{b \text{ km/h}} = \frac{s}{b} \text{ h}.$$

Weil er insgesamt die Strecke $2s$ km zurücklegt, beträgt seine durchschnittliche Geschwindigkeit also

$$\frac{2s \text{ km}}{\frac{s}{a}\text{ h} + \frac{s}{b}\text{ h}} = \frac{2s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}} \text{ km/h} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \text{ km/h}.$$

Aufgabe 2

a) Wir zeigen die erste Aussage:

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \quad : \quad \big[A(z) \implies B(z)\big]$$

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und z ungerade. Zu zeigen ist: $z^2 + 2z + 3$ ist gerade.
Weil $z \in \mathbb{Z}$ ungerade ist, gibt es nach Definition 1.13 b) ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = 2k + 1$. Es folgt dann mit Hilfe der binomischen Formel

$$\begin{aligned} z^2 + 2z + 3 &= (2k+1)^2 + 2(2k+1) + 3 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 + 3 \\ &= 4k^2 + 8k + 6 \\ &= 2(\underbrace{2k^2 + 4k + 3}_{\in\mathbb{Z}}). \end{aligned}$$

Damit ist $z^2 + 2z + 3$ nach Definition 1.13 a) gerade.
Wir zeigen nun die zur zweiten Aussage

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \quad : \quad \big[B(z) \implies A(z)\big]$$

äquivalente Aussage

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \quad : \quad \big[\neg A(z) \implies \neg B(z)\big].$$

Sei $z \in \mathbb{Z}$ und z nicht ungerade, also gerade. Zu zeigen ist: $z^2 + 2z + 3$ ist ungerade.
Weil $z \in \mathbb{Z}$ gerade, gibt es nach Definition 1.13 b) ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = 2k$. Es folgt dann mit Hilfe der Binomischen Formel

$$\begin{aligned} z^2 + 2z + 3 &= (2k)^2 + 2(2k) + 3 \\ &= 4k^2 + 4k + 3 \\ &= 4k^2 + 4k + 2 + 1 \\ &= 2(\underbrace{2k^2 + 2k + 1}_{\in\mathbb{Z}}) + 1. \end{aligned}$$

Damit ist $z^2 + 2z + 3$ nach Definition 1.13 b) ungerade.

b) Wir zeigen die Aussage:

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \quad : \quad \big[A(z) \implies C(z)\big]$$

Sei $z \in \mathbb{Z}$ ungerade.

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Def. 1.13b)}}{\implies} && \exists\, k \in \mathbb{Z} \ : \ z = 2k + 1 \\ &\implies && z^2 + z + 1 = (2k+1)^2 + (2k+1) + 1 \\ &&& = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 + 1 \\ &&& = 4k^2 + 6k + 2 + 1 \\ &&& = 2(\underbrace{2k^2 + 3k + 1}_{\in\mathbb{Z}}) + 1. \\ &\overset{\text{Def. 1.13b)}}{\implies} && z^2 + z + 1 \ \text{ ist ungerade.} \end{aligned}$$

Die Aussage

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \quad : \quad \big[C(z) \implies A(z)\big]$$

ist falsch, denn für z.B. $z = 2$ ist $z^2 + z + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$ ungerade (also gilt $C(2)$), aber die Aussage $A(2)$ ist falsch, denn $z = 2$ ist gerade.

Aufgabe 3

a) Die Negationen von P_1 und P_2 lauten

$$\begin{aligned}\neg P_1 &: \quad \forall x \in M \quad \exists y \in M \ : \ x > y,\\ \neg P_2 &: \quad \exists y \in M \quad \forall x \in M \ : \ x > y,\end{aligned}$$

b) Die Aussage P_1 ist im Fall $M = \mathbb{N}$ **wahr**, denn:
Wähle $x = 1$. Dann gilt in der Tat für alle $y \in \mathbb{N}$, dass $x = 1 \leq y$.

Die Aussage P_1 ist im Fall $M = \mathbb{Z}$ **falsch**, also $\neg P_1$ ist wahr, denn:
Sei $x \in \mathbb{Z}$. Dann gilt mit der Wahl von $y := x - 1$, dass $x > x - 1 = y$.

Die Aussage P_2 ist für jede Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ **wahr**, also insbesondere für $M = \mathbb{N}$ und $M = \mathbb{Z}$, denn:
Sei $y \in M$. Dann gilt mit der Wahl von $x := y$, dass $x \leq x = y$.

Aufgabe 4

a) Es ist

$$A \subset B \implies a \in \{8, a+1, 4\} \implies a = 8 \ \vee \ a = 4.$$

Aus $a = 8$ folgt, dass $B = \{8, 9, 4\}$ und $A = \{5, 8, 2x\}$, also wegen $5 \notin B$, dass $A \not\subset B$, ein Widerspruch zu $A \subset B$.
Aus $a = 4$ folgt, dass $B = \{8, 5, 4\}$ und $A = \{5, 4, 2x\}$, also, wegen $A \subset B$, dass $x \in \{2, 2.5, 4\}$.
Zusammenfassend gilt also

$$A \subset B \implies a = 4 \ \wedge \ x \in \{2, 2.5, 4\}.$$

Da zudem auch

$$\begin{aligned} a = 4 \ \wedge \ x \in \{2, 2.5, 4\} \quad &\implies \quad \Big(A = \{4, 5\} \vee A = \{4, 5, 8\}\Big) \ \wedge \ B = \{8, 4, 5\}\\ &\implies \quad A \subset B, \end{aligned}$$

ist also

$$A \subset B \iff a = 4 \ \wedge \ x \in \{2, 2.5, 4\}.$$

b) i) Es ist $\quad N = \{3, 0, -1, 0, 3, 8\} = \{-1, 0, 3, 8\}$

ii) Es ist

$$\begin{aligned} M \cup N &= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 8\}\\ M \cap N &= \{-1, 0, 3\}\\ N \backslash M &= \{8\}\\ M \backslash N &= \{-2, 1, 2, \}. \end{aligned}$$

iii) Es ist

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in M \times N \mid x < y\} = \big\{&(-2, -1), (-2, 0), (-2, 3), (-2, 8),\\ &(-1, 0), (-1, 3), (-1, 8), (0, 3), (0, 8),\\ &(1, 3), (1, 8), (2, 3), (2, 8), (3, 8)\big\}. \end{aligned}$$