Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

2. Übungsblatt

Aufgabe 1. (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, gilt:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

(Dabei dürfen Schulkenntnisse wie Bruchrechnung, die Binomischen Formeln usw. verwendet werden.)

b) Ein Fahrradfahrer fährt eine Stunde lang bergauf mit a km/h und anschließend eine Stunde lang bergab mit konstant b km/h. Wie groß ist seine durchschnittliche Geschwindigkeit.

c) Ein Fahrradfahrer fährt mit konstant a km/h auf einen Berg und anschließend die gleiche Strecke mit konstant b km/h zurück. Berechnen Sie seine durchschnittliche Geschwindigkeit.

Aufgabe 2. (*5 Punkte*) Für eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ betrachten wir die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} A(z) &: \text{„}z \text{ ist ungerade.“} \\ B(z) &: \text{„}z^2 + 2z + 3 \text{ ist gerade.“} \\ C(z) &: \text{„}z^2 + z + 1 \text{ ist ungerade.“} \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie die Aussage

$$\forall z \in \mathbb{Z} : [A(z) \Longrightarrow B(z)]$$

durch einen direkten Beweis, und die Aussage

$$\forall z \in \mathbb{Z} : [B(z) \Longrightarrow A(z)]$$

durch einen indirekten Beweis.

b) Zeigen Sie die Aussage

$$\forall z \in \mathbb{Z} : [A(z) \Longrightarrow C(z)]$$

durch einen direkten Beweis und entscheiden Sie, ob in dieser Aussage auch die Umkehrung „$\Longleftarrow$“ gilt.

Aufgabe 3. (*4 Punkte*) Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ betrachte man die Aussagen

$$\begin{aligned} P_1 &: \quad \exists x \in M \quad \forall y \in M \ : \ x \leq y, \\ P_2 &: \quad \forall y \in M \quad \exists x \in M \ : \ x \leq y. \end{aligned}$$

a) Bilden Sie die Negationen der Aussagen P_1 und P_2.

b) Bestimmen Sie (mit Beweis) den Wahrheitswert der Aussagen P_1 und P_2 für die Mengen $M = \mathbb{N}$ und $M = \mathbb{Z}$. *(Hierbei dürfen Schulkenntnisse über die natürlichen und ganzen Zahlen verwendet werden.)*

Aufgabe 4. (***6 Punkte***)

a) Es seien $a, x \in \mathbb{R}$ und $A = \{5, a, 2x\}$ sowie $B = \{8, a+1, 4\}$. Für welche Werte von a und x ist $A \subset B$ eine wahre Aussage? (Beweisen Sie Ihre Antwort.)

b) Es seien $M = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ und $N = \{x^2 - 1 \,|\, x \in M\}$.

(i) Man bestimme die Elemente von N.

(ii) Man bestimme $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$ und $N \setminus M$.

(iii) Man bestimme die Menge $\{(x, y) \in M \times N \,|\, x < y\}$.

Wenn Sie eine Korrektur wünschen, werfen Sie die Lösungen spätestens am **Freitag, 10. November 2017, 14 Uhr** in den Ubungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) ein. Bitte die Angabe des eigenen Namens und der Bezeichnung des bei der Anmeldung angegebenen Tutoriums nicht vergessen! Bitte heften Sie Ihre Lösung zusammen!