Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2017/18
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
S. Aristarkhov, M. Jeblick

Musterlösung des 1. Übungsblatts

Aufgabe 1.

a) Wir haben als mögliche sprachliche Formulierungen

- $P \wedge Q$: Clara liest ein Buch und hört dabei Musik.
- $P \vee Q$: Clara liest ein Buch oder hört Musik, oder beides.
- $P \Rightarrow Q$: Wenn Clara ein Buch liest, dann hört sie dabei Musik.
- $P \Leftrightarrow Q$: Clara liest genau dann ein Buch, wenn sie Musik hört.

b) Wir verneinen die Aussagen formal und sprachlich und geben verschiedene äquivalente Möglichkeiten dafür an.

- $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$: Clara liest nicht ein Buch und hört dabei Musik. Oder: Clara liest kein Buch oder hört keine Musik.
- $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$: Clara liest weder ein Buch noch hört sie Musik. Oder: Clara liest kein Buch und hört auch keine Musik.
- $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$: Clara liest ein Buch, aber hört keine Musik dabei.
- $\neg(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$: Clara liest entweder ein Buch oder sie hört Musik (nicht beides zugleich).

Aufgabe 2.

a) Wir stellen folgende Wahrheitstafel auf:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	f
f	w	w	w	w	f	f	f
f	w	f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Die Aussagen sind nicht äquivalent, denn in der 4. und 5. Zeile ergeben sich abweichende Wahrheitswerte.

b) Teile der Wahrheitstafel von oben können wir wieder verwenden:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \wedge Q) \wedge (P \wedge R)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Somit sind die Aussagen $P \vee (Q \wedge R)$ und $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ tatsächlich äquivalent.

c) In diesem Fall ergibt sich als Wahrheitstafel:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Damit ist bewiesen, dass $P \wedge (Q \vee R)$ und $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ äquivalente Aussagen sind.

d) Wir stellen die bereits gewonnenen Wahrheitstafeln neu zusammen und erhalten:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	w	w
f	w	w	w	f	w	w	w
f	w	f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Wieder sehen wir, dass die Aussagen nicht äquivalent sind.
Dies wäre im Übrigen auch ohne Wahrheitstafel schon klar gewesen, denn aus den vorhergehenden Teilaufgaben wissen wir, dass

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

und

$$(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)),$$

aber dass

$$\neg((P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)))$$

gilt. Man schreibt dafür auch

$$(P \vee (Q \wedge R)) \not\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)).$$

Durch Kombination dieser drei Aussagen folgt sofort, dass

$$((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \not\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee R)).$$

Aufgabe 3. Das ausschließende Oder wollen wir mit $A\dot{\vee}B$ notieren. Die definierende Wahrheitstafel ist:

A	B	$A\dot{\vee}B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Nun wollen wir eine äquivalente Beschreibung mit Hilfe der üblichen logischen Symbole finden. Wir behaupten, dass

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

eine äquivalente Darstellung ist, genau so wie

$$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B),$$

oder eine kürzere:

$$\neg A \iff B.$$

Beweisen wir dies für den letzten Fall mit Hilfe der Wahrheitstafel:

A	B	$A\dot{\vee}B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \Leftrightarrow B$
w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	w	w
f	w	w	w	f	w
f	f	f	w	w	f

Die Wahrheitswerte stimmen wieder überein, womit die Behauptung

$$(A\dot{\vee}B) \iff (\neg A \iff B)$$

bewiesen ist. Ganz ähnlich lässt sich die Äquivalenz mit den anderen Aussagen beweisen.

Aufgabe 4. Auch hier stellen wir die Wahrheitstafeln auf, wir beginnen mit der Aussage

$$((P \implies R) \wedge (Q \implies R)) \implies (P \implies Q),$$

die wir als $\clubsuit$ abkürzen.

P	Q	R	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$\clubsuit$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	f
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

In einem Fall ist die Aussage $\clubsuit$ falsch, also keine Tautologie.
Die zweite Aussage

$$((P \implies R) \wedge (Q \implies \neg R)) \implies (P \implies \neg Q)$$

kürzen wir als $\diamondsuit$ ab und stellen folgende Wahrheitstafel auf:

P	Q	R	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow \neg R$	$P \Rightarrow \neg Q$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow \neg R)$	$\diamondsuit$
w	w	w	w	f	f	f	w
w	w	f	f	w	f	f	w
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	f	w
f	w	w	w	f	w	f	w
f	w	f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Hier sehen wir, dass die Aussage $\diamondsuit$ eine Tautologie ist, denn sie ist stets wahr.