Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2015/16
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, L. Nickel

Musterlösung des 13. Übungsblatts

Aufgabe 1.

a) Um zur Bestimmung von σ^{2018} nicht 2018 Faktoren multiplizieren zu müssen, wäre es nützlich, zu wissen, welche Potenzen von σ die Identität sind – wir sollten also die *Ordnung* von σ bestimmen. Dies geht am einfachsten, indem wir σ als Produkt disjunkter Zyklen schreiben (denn dann ist die Ordnung von σ das kleinste gemeinsame Vielfache der Längen dieser Zyklen). Aber es ist $\sigma = (2\ \ 4\ \ 8) \circ (3\ \ 5\ \ 7)$, also $\operatorname{ord}(\sigma) = 3$ und damit $\sigma^3 = \mathrm{id}$. Wegen $2018 = 672 \cdot 3 + 2$ gilt damit

$$\sigma^{2018} = \sigma^{672\cdot 3+2} = (\sigma^3)^{672} \circ \sigma^2 = \mathrm{id}^{672} \circ \sigma^2 = \mathrm{id} \circ \sigma^2 = \sigma^2.$$

Es ergibt sich wegen

$$\mathrm{id} = \sigma^3 = \sigma \circ \sigma^2 = \sigma^2 \circ \sigma, \qquad \text{dass} \qquad \sigma^{-1} = \sigma^2,$$

also

$$\sigma^2 = \sigma^{-1} = (8\ \ 4\ \ 2) \circ (7\ \ 5\ \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 1 & 8 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Es muss

$$\begin{aligned} \alpha = \sigma^{-1} \circ \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \beta = \tau \circ \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sein.

c) Es ist $\sigma = (2\ \ 4\ \ 8) \circ (3\ \ 5\ \ 7) = (2\ \ 4) \circ (4\ \ 8) \circ (3\ \ 5) \circ (5\ \ 7)$ sowie $\tau = (1\ \ 3\ \ 6\ \ 2\ \ 7) \circ (4\ \ 8) = (1\ \ 3) \circ (3\ \ 6) \circ (6\ \ 2) \circ (2\ \ 7) \circ (4\ \ 8)$ und damit $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ (denn es sind 4 Transpositionen, und 4 ist eine gerade Zahl) sowie $\operatorname{sign}(\tau) = -1$ (denn es sind 5 Transpositionen, und 5 ist eine ungerade Zahl).

Damit kann es aber kein $\psi \in S_8$ geben mit $\sigma \circ \psi = \psi \circ \tau$: Denn dann wäre (durch Anwenden der Funktion sign auf beide Seiten der Gleichung und Verwenden von 6.14a))

$$\begin{aligned} & \operatorname{sign}(\sigma \circ \psi) = \operatorname{sign}(\psi \circ \tau) \\ \Longrightarrow \quad & \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\psi) = \operatorname{sign}(\psi) \cdot \operatorname{sign}(\tau) \\ \Longrightarrow \quad & \operatorname{sign}(\psi) = -\operatorname{sign}(\psi), \end{aligned}$$

was unmöglich ist.

Aufgabe 2. Wir gehen wieder so vor, wie im Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3 vom 13. Tutoriumsblatt beschrieben: Wir geben also zunächst die Zyklusdarstellungen aller Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau k Fixpunkten ($k = 0, 1, \ldots, 6$) an und zählen danach, wieviele verschiedene Permutationen eines jeden Typs es jeweils gibt.
Wieder sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und es seien jeweils $a, b, c, d, e, f \in M$ paarweise verschieden.

- $k = 0$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 0$ Fixpunkten „bewegt" alle 6 Zahlen $a, b, c, d, e, f \in M$; um diese auf (paarweise) disjunkte Zyklen der Länge ≥ 2 zu verteilen, haben wir die folgenden Möglichkeiten

$$\begin{array}{rrll} & \text{i)} & \sigma = (a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f) & \text{(6-Zyklus)} \\ \text{oder} & \text{ii)} & \sigma = (a\ \ b\ \ c\ \ d) \circ (e\ \ f) & \text{(ein 4-Zyklus und ein 2-Zyklus)} \\ \text{oder} & \text{iii)} & \sigma = (a\ \ b\ \ c) \circ (d\ \ e\ \ f) & \text{(zwei 3-Zyklen)} \\ \text{oder} & \text{iv)} & \sigma = (a\ \ b) \circ (c\ \ d) \circ (e\ \ f) & \text{(drei 2-Zyklen).} \end{array}$$

(Diese Vielzahl von Möglichkeiten könnte uns auf die Idee bringen, diese Permutationen dieses Typs nicht Fall für Fall zu zählen, sondern ihre Anzahl nach Erledigung aller anderen Fälle aus der *Gesamtzahl* $6! = 720$ von Permutationen in S_6 zu erschließen.)

Anzahl der σ in i):

$$\binom{6}{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \ = \ 120,$$

denn: Es gibt $\binom{6}{6} = 1$ Möglichkeit, 6 Zahlen aus M für den 6-Zyklus $(a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f)$ auszuwählen.
Zum Zählen der 6-Zyklen $(a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f)$ bemerken wir, dass wir ihn stets so schreiben können, dass er die Form $(a\ \ ?\ \ ?\ \ ?\ \ ?\ \ ?)$ hat, also mit a (z.B. $a = 1$) beginnt. Für die nächste Zahl gibt es dann 5 Möglichkeiten, für die dritte noch 4, für die vierte noch 3, für die fünfte noch 2, und die letzte ist dann festgelegt. Diese 6-Zyklen sind auch alle verschieden, daher gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene 6-Zyklen bei gegebener Trägermenge $\{a, b, c, d, e, f\}$.

Anzahl der σ in ii):

$$\binom{6}{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \ \cdot \ \binom{2}{2} \cdot 1 \ = \ 90,$$

denn: Es gibt $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten, 4 Zahlen aus M für den 4-Zyklus $(a\ \ b\ \ c\ \ d)$ auszuwählen. Nun kann jeder 4-Zyklus bei fest gewählten a, b, c, d in der Form $(a\ \ ?\ \ ?\ \ ?)$ geschrieben werden, also gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene 4-Zyklen bei gegebener Trägermenge $\{a, b, c, d\}$. Danach gibt es $\binom{2}{2} = 1$ Möglichkeiten, 2 weitere Zahlen aus M für den 2-Zyklus $(e\ \ f)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden.

Anzahl der σ in iii):

$$\binom{6}{3} \cdot 2 \cdot 1 \ \cdot \ \binom{3}{3} \cdot 2 \cdot 1 \ \cdot \frac{1}{2} = \ 40,$$

denn: Es gibt $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten, 3 Zahlen aus M für den ersten 3-Zyklus $(a\ \ b\ \ c)$ auszuwählen, und $2 \cdot 1$ Möglichkeiten, aus diesen einen 3-Zyklus zu bilden. Danach gibt es $\binom{3}{3}$ Möglichkeiten, 3 weitere Zahlen aus M für den zweiten 3-Zyklus $(d\ \ e\ \ f)$ auszuwählen, und $2 \cdot 1$ Möglichkeiten, aus diesen einen 3-Zyklus zu bilden. Der Faktor $\frac{1}{2}$ erklärt sich dadurch, dass durch dieses Auswahlverfahren jedes σ doppelt gezählt wurde, da ja $(a\ \ b\ \ c) \circ (d\ \ e\ \ f) = (d\ \ e\ \ f) \circ (a\ \ b\ \ c)$ ist (z.B.: im ersten Schritt wählt man $1, 2$

und 3 aus, im zweiten Schritt $4, 5$ und 6, und bildet daraus $(1\ \ 2\ \ 3) \circ (4\ \ 5\ \ 6)$; wählt man nun im ersten Schritt $4, 5$ und 6 aus, im zweiten Schritt $1, 2$ und 3, so erhält man die Permutation $(4\ \ 5\ \ 6) \circ (1\ \ 2\ \ 3)$, die identisch mit der vorherigen ist, aber nochmal neu gezählt worden ist.)

Anzahl der σ in iv):

$$\binom{6}{2} \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot \binom{2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3!} = 15,$$

denn: Es gibt $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten, 2 Zahlen aus M für den ersten 2-Zyklus $(a\ \ b)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden. Danach gibt es $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, 2 weitere Zahlen aus M für den zweiten 2-Zyklus $(d\ \ e)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden, und schließlich noch $\binom{2}{2}$ Möglichkeiten, 2 weitere Zahlen aus M für den dritten 2-Zyklus $(e\ \ f)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden. Der Faktor $\frac{1}{3!}$ erklärt sich dadurch, dass durch dieses Auswahlverfahren jedes σ 6-fach gezählt wurde, da es $3! = 6$ Möglichkeiten gibt, ein und dasselbe $\sigma = (a\ \ b) \circ (c\ \ d) \circ (e\ \ f)$ durch Vertauschung der Reihenfolge der Transpositionen zu bekommen (es ist ja $(a\ \ b) \circ (c\ \ d) \circ (e\ \ f) = (a\ \ b) \circ (e\ \ f) \circ (c\ \ d) = (c\ \ d) \circ (a\ \ b) \circ (e\ \ f) = \ldots$).

Also gibt es insgesamt $120 + 90 + 40 + 15 = 265$ Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau $k = 0$ Fixpunkten.

- $k = 1$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 1$ Fixpunkten „bewegt" 5 Zahlen $a, b, c, d, e \in M$; um diese auf (paarweise) disjunkte Zyklen der Länge ≥ 2 zu verteilen, haben wir die folgenden Möglichkeiten:

	i) $\sigma = (a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e)$	(5-Zyklus)
oder	ii) $\sigma = (a\ \ b\ \ c) \circ (d\ \ e)$	(ein 3-Zyklus und ein 2-Zyklus).

Anzahl der σ in i):

$$\binom{6}{5} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144,$$

denn: Es gibt $\binom{6}{5}$ Möglichkeiten, 5 Zahlen aus M für den 5-Zyklus $(a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e)$ auszuwählen.
Zum Zählen der 5-Zyklen $(a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e)$ bemerken wir, dass wir ihn stets so schreiben können, dass er die Form $(a\ \ ?\ \ ?\ \ ?\ \ ?)$ hat, also mit a (z.B der kleinsten Zahl) beginnt. Für die nächste Zahl gibt es dann 4 Möglichkeiten, für die dritte noch 3, für die vierte noch 2, und die letzte ist dann festgelegt. Diese 5-Zyklen sind auch alle verschieden, daher gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene 5-Zyklen bei gegebener Trägermenge $\{a, b, c, d, e\}$.

Anzahl der σ in ii):

$$\binom{6}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \binom{3}{2} \cdot 1 = 120,$$

denn: Es gibt $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten, 3 Zahlen aus M für den 3-Zyklus $(a\ \ b\ \ c)$ auszuwählen, und $2 \cdot 1$ Möglichkeiten, aus diesen einen 3-Zyklus zu bilden. Danach gibt es $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten, 2 weitere Zahlen aus M für den zweiten 2-Zyklus $(d\ \ e)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden.

Also gibt es insgesamt $144 + 120 = 264$ Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau $k = 1$ Fixpunkt.

Das Abzählschema ist nun erkennbar und wiederholt sich; wir fassen uns deshalb bei den folgenden Fällen kürzer (die Fälle $k = 2$ und $k = 3$ wurden auch schon in der Vorlesung besprochen) und präsentieren nur das Ergebnis.

- $k = 2$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 2$ Fixpunkten „bewegt“ 4 Zahlen $a, b, c, d \in M$; um diese auf (paarweise) disjunkte Zyklen der Länge ≥ 2 zu verteilen, haben wir die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{array}{rll} & \text{i)}\ \ \sigma = (a\ \ b\ \ c\ \ d) & \qquad\qquad \text{(4-Zyklus)} \\ \text{oder} & \text{ii)}\ \ \sigma = (a\ \ b) \circ (c\ \ d) & \qquad\qquad \text{(zwei 2-Zyklen).} \end{array}$$

  Anzahl der σ in i):

$$\binom{6}{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \;=\; 90,$$

  und
  Anzahl der σ in ii):

$$\binom{6}{2} \cdot 1 \;\cdot \binom{4}{2} \cdot 1 \;\cdot \frac{1}{2} \;=\; 45.$$

  Also gibt es insgesamt $90 + 45 = 135$ Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau $k = 2$ Fixpunkten.

- $k = 3$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 3$ Fixpunkten „bewegt“ 3 Zahlen $a, b, c \in M$; um diese auf (paarweise) disjunkte Zyklen der Länge ≥ 2 zu verteilen, haben wir nur die folgende Möglichkeit:

$$\sigma = (a\ \ b\ \ c) \qquad\qquad \text{(3-Zyklus)}$$

  Anzahl dieser σ:

$$\binom{6}{3} \cdot 2 \cdot 1 \;=\; 40.$$

  Also gibt es 40 Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau $k = 3$ Fixpunkten.

- $k = 4$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 4$ Fixpunkten „bewegt“ 2 Zahlen $a, b \in M$; um diese auf (paarweise) disjunkte Zyklen der Länge ≥ 2 zu verteilen, haben wir nur die folgende Möglichkeit:

$$\sigma = (a\ \ b) \qquad\qquad \text{(2-Zyklus)}$$

  Anzahl dieser σ:

$$\binom{6}{2} \cdot 1 \;=\; 15.$$

  Also gibt es 15 Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau $k = 4$ Fixpunkten.

- $k = 5$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 5$ Fixpunkten gibt es nicht, denn wenn 5 Zahlen $a, b, c, d, e \in M$ festbleiben sollen, gilt automatisch für die übriggebliebene Zahl f ebenfalls $\sigma(f) = f$, und damit hätte σ nicht 5 sondern 6 Fixpunkte.

  Also gibt es 0 Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau $k = 5$ Fixpunkten.

- $k = 6$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 6$ Fixpunkten „bewegt“ 6-6 = 0 Zahlen, ist also die Identität.

  Also gibt es 1 Permutation $\sigma \in S_5$ mit genau $k = 5$ Fixpunkten.

Zur Kontrolle berechnen wir die Summe aller Ergebnisse – da jede Permutation in S_6 zwischen 0 und 6 Fixpunkte hat, müssen wir insgesamt alle Permutationen in S_6 erwischt haben. Und tatsächlich ist $265 + 264 + 135 + 40 + 15 + 1 = 720$, und da S_6 genau $6! = 720$ Elemente hat, sind uns keine Permutationen durch die Lappen gegangen.