Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2017/18
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

Musterlösung des 11. Übungsblatts

Aufgabe 1. **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ ist $a_0 = 0$ sowie

$$\frac{2}{3}\left(1+(-1)^{0+1}\frac{1}{2^0}\right) = \frac{2}{3}(1-1) = 0,$$

die Aussage stimmt also.
Induktionsschluss $n \to n+1$. Sei $n \geq 0$ und gelte

$$a_k = \frac{2}{3}\left(1+(-1)^{k+1}\frac{1}{2^k}\right) \quad \text{für alle} \quad k \in \{0,1,...,n\}. \qquad (\textbf{Induktionsvoraussetzung})$$

Zu zeigen ist

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}\left(1+(-1)^{n+2}\frac{1}{2^{n+1}}\right). \qquad (\textbf{Induktionsbehauptung})$$

Wir müssen, damit die Rekursionsformel greift, die beiden Fälle unterscheiden:

1. Fall: $n = 0$. Hier rechnen wir die Gültigkeit der Induktionsbehauptung direkt nach:
Es ist $a_{0+1} = a_1 = 1$, und auch $\frac{2}{3}\left(1+(-1)^{0+2}\frac{1}{2^{0+1}}\right) = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} = 1.$
Diesen Fall kann man auch in den Induktionsanfang stecken und damit dort die Aussage für $n = 0$ und $n = 1$ nachweisen!

2. Fall: $n \geq 1$.
Dann ist auch $n - 1 \geq 0$ und wir dürfen die Rekursionsformel einsetzen. Es ist

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\overset{\text{Rek.Formel}}{=} \frac{1}{2}\cdot(a_{n-1}+a_n) \\
&\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{3}\left(1+(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{2}{3}\left(1+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1+(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}+1+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(2+(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}\left(1+(-1)^1\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(2+(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(2+(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(2+(-1)^n\frac{1}{2^n}\right) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\left(1+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}\right),
\end{aligned}$$

und dies zeigt die Behauptung, da $(-1)^n = (-1)^{n+2}$ gilt wegen $(-1)^2 = 1$.

Aufgabe 2.

a) **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ liefert die linke Seite den Wert 0 (leere Summe), die rechte den Wert $(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$, die Behauptung stimmt also in diesem Fall.

Induktionsschluss $n \to n+1$. Sei $n \geq 0$ und gelte $\sum_{k=1}^{n}(k! \cdot k) = (n+1)! - 1$. Zu zeigen ist $\sum_{k=1}^{n+1}(k! \cdot k) = (n+2)! - 1$.

Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(k! \cdot k) &= \sum_{k=1}^{n}(k! \cdot k) + (n+1)! \cdot (n+1) \\ &\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)! \cdot (n+1) \\ &= (n+1)!\big(1 + (n+1)\big) - 1 \\ &= (n+1)! \cdot (n+2) - 1 = (n+2)! - 1,\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

b) Diese Aussage hängt von zwei Variablen k, n ab, wobei immer $0 \leq k \leq n$ verlangt wird. „Induktion nach n" bedeutet hier also: Wir führen für jedes (als festgehalten zu denkende) $k \geq 0$ einen Induktionsbeweis für alle $n \geq k$.

Induktionsanfang. Für $n = k$ ist die linke Seite $\sum_{j=k}^{k}\binom{k}{j} = \binom{k}{k} = 1$; die rechte Seite ist $\binom{k+1}{k+1} = 1$, so dass die Aussage in diesem Fall stimmt.

Induktionsschluss $n \to n+1$. Sei $n \geq k$ und gelte $\displaystyle\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Zu zeigen ist, dass

$$\sum_{j=k}^{n+1}\binom{j}{k} = \binom{n+2}{k+1}.$$

Es ist

$$\sum_{j=k}^{n+1}\binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k} + \binom{n+1}{k} \overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \overset{(*)}{=} \binom{n+2}{k+1},$$

wobei im Schritt $(*)$ die Rekursionsformel 6.2b) für die Binomialkoeffizienten aus der Vorlesung verwendet wurde.

Aufgabe 3.

a) Wir beweisen die Formel durch Induktion nach n:

Induktionsanfang. Sei $n = 2$. Dann hat linke Seite den Wert $x_2^2 = 1^2 = 1$, die rechte den Wert $x_1 \cdot x_3 - (-1)^2 = 1 \cdot 2 - 1 = 1$. In diesem Fall stimmt die Formel also.

Induktionsschluss $n \to n+1$. Sei $n \geq 2$ und gelte $x_n^2 = x_{n-1} \cdot x_{n+1} - (-1)^n$. Zu zeigen ist, dass $x_{n+1}^2 = x_n \cdot x_{n+2} - (-1)^{n+1}$.
Wir werden i.f. die Induktionsvoraussetzung in der Form $x_{n-1} \cdot x_{n+1} = x_n^2 + (-1)^n$ verwenden!

Es ist

$$
\begin{aligned}
(x_{n+1})^2 &= x_{n+1} \cdot x_{n+1} \\
&\overset{\text{Rek.Formel}}{=} x_{n+1} \cdot (x_n + x_{n-1}) \\
&= x_{n+1}x_n + x_{n+1}x_{n-1} \\
&\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} x_{n+1}x_n + x_n^2 + (-1)^n \\
&= x_n(x_{n+1} + x_n) + (-1)^n \\
&\overset{\text{Rek.Formel}}{=} x_n \cdot x_{n+2} + (-1)^n \\
&= x_n \cdot x_{n+2} - (-1)^{n+1},
\end{aligned}
$$

da $(-1)^{n+1} = (-1) \cdot (-1)^n = -(-1)^n$.

b) Die explizite Formel für die Glieder der Fibonaccifolge lautet (siehe 5.20)

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(a^n - b^n \right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},
\end{aligned}
$$

wobei wir zur Abkürzung a und b definiert haben durch

$$
a := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad b := \frac{1-\sqrt{5}}{2}.
$$

Für unsere Rechnungen wird es nützlich sein, sich zu merken, dass

$$
a \cdot b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1
$$

ist. Damit ergibt sich einerseits

$$
\begin{aligned}
x_n^2 &= \frac{1}{5} \left(a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(a^{2n} + b^{2n} - 2 \cdot (-1)^n \right)
\end{aligned}
$$

und andererseits für $n \geq 2$

$$
\begin{aligned}
x_{n-1}\, x_{n+1} &= \frac{1}{5} \left(a^{n-1} - b^{n-1} \right) \left(a^{n+1} - b^{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(a^{2n} + b^{2n} - a^{n-1}b^{n+1} - b^{n-1}a^{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(a^{2n} + b^{2n} - a^{n-1}b^{n-1} \cdot \left(b^2 + a^2 \right) \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(a^{2n} + b^{2n} - (-1)^{n-1} \left(b^2 + a^2 \right) \right).
\end{aligned}
$$

Da aber

$$
b^2 + a^2 = \frac{(1-\sqrt{5})^2 + (1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 5}{4} = 3
$$

ist, ergibt sich damit

$$
\begin{aligned}
x_{n-1}\, x_{n+1} - (-1)^n &= \frac{1}{5}\left(a^{2n} + b^{2n} - 3\cdot(-1)^{n-1}\right) - (-1)^n \\
&= \frac{1}{5}\left(a^{2n} + b^{2n} + 3\cdot(-1)^{n} - 5\cdot(-1)^n\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(a^{2n} + b^{2n} - 2\cdot(-1)^{n}\right) \\
&= x_n^2,
\end{aligned}
$$

wie behauptet.

Aufgabe 4. Unter Benutzung des binomischen Lehrsatzes 6.4 gilt

$$
\begin{aligned}
(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{3})^k 1^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\sqrt{3})^k 1^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{3})^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\sqrt{3})^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k\right).
\end{aligned}
$$

Für ungerade k heben sich die Terme $(\sqrt{3})^k$ und $(-\sqrt{3})^k$ genau auf, also $(\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$ ungerade. Und für $k \in \mathbb{N}_0$ gerade, also $k = 2l$ mit $l \in \mathbb{N}_0$, ist

$$
(\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k = (\sqrt{3})^{2l} + (-\sqrt{3})^{2l} = 3^l + 3^l = 2\cdot 3^l \in \mathbb{N}.
$$

Damit ist also

$$
(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k\right), \qquad (+)
$$

eine Summe über natürliche Zahlen oder 0, wobei der erste Summand gleich 2, also in $\mathbb{N}$ ist. Damit ist $(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$ eine natürliche Zahl. Dies war zu beweisen.

[*Die Formel schaut dann z.B. so aus: Wir lassen in der obigen Summe* (+) *alle ungeraden* k *weg, weil die Summanden sowieso null sind, und schreiben nur noch die geraden hin, also* $k = 2l$. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *definieren wir* $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} | k \le x\}$. $\lfloor x \rfloor$ *rundet also* x *zur nächstliegenden ganzen Zahl ab. Wir können die Summe in* (+) *damit auch schreiben als*

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n}{2l}\left((\sqrt{3})^{2l} + (-\sqrt{3})^{2l}\right). \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n}{2l}\left(3^l + 3^l\right) \\
&= 2\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n}{2l}3^l. \quad]
\end{aligned}
$$