Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

10. Übungsblatt

Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Man formuliere das Prinzip der vollständigen Induktion und beweise damit die folgende Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \, \frac{n(n+1)}{2}.$$

(Dies ist eine Staatsexamensaufgabe vom Frühjahr 2002.)

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Man zeige mittels vollständiger Induktion

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. *(Dies ist eine Staatsexamensaufgabe vom Herbst 2005.)*

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben sei die durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{2 + a_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Finden Sie eine explizite Darstellung von a_n für alle $n \in \mathbb{N}$, und beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Formel!

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n: Ist M eine endliche Menge mit $|M| = n \in \mathbb{N}_0$, so ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.
(Hinweis für den Induktionsschritt $n \to n+1$: Für eine Menge M mit $|M| = n+1$ fixiert man ein beliebiges Element $x \in M$ und zeigt, dass es genau so viele Teilmengen von M gibt, die das Element x enthalten, wie Teilmengen, die es nicht *enthalten.)*

Wenn Sie eine Korrektur wünschen, werfen Sie die Lösungen spätestens am
Freitag, 19. Januar 2018, 14 Uhr mit Namen versehen in den Übungskasten ein.