Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2017/18
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

9. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion I).

a) Bestimmen Sie für $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ die Summe $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ der ersten n ungeraden Zahlen. Welche Vermutung liegt nahe?

b) Beweisen Sie die unter a) vermutete Formel für die Summe $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 2 (Peanostrukturen). Untersuchen Sie für die folgenden Wahlen einer Menge N, eines Elements $n_0 \in N$ und einer Abbildung $\nu : N \to N$, ob (N, n_0, ν) eine Peanostruktur ist. Welche der drei definierenden Eigenschaften einer Peanostruktur sind erfüllt, welche nicht?

a) $N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $n_0 = 0$, und ν gegeben durch

$$\nu(n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } 0 \leq n < 4, \\ 0 & \text{falls } n = 4. \end{cases}$$

b) $N = \{A, B, C, D, E, F\}$, $n_0 = A$, und ν gegeben durch die Wertetabelle

n	A	B	C	D	E	F
$\nu(n)$	B	C	D	E	F	C.

Aufgabe 3 (Vollständige Induktion II). Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Ungleichungen:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ gilt $2^n > n^3$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq 1$ gilt $(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x$.

Aufgabe 4 (Gleichmächtigkeit)

a) Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleichmächtig sind (*das soll echt einfach sein, falls Sie das ÜB 7 gelöst haben*).

b) Zeigen Sie, dass die Mengen der reelen Zahlen $A = [0, 1]$ und $B = [0, 2]$ gleichmächtig sind.

c) Gegeben ist eine endliche Menge A mit k Elementen. Zeigen Sie, dass die Menge aller Teilmenge von A und die Menge aller k-Tupel aus 0 und 1 (d.h. die Menge aller Folgen, wo jedes Element entweder 0 oder 1 ist) gleichmächtig sind.

Aufgabe 5 (Vollständige Induktion III). Jemand möchte beweisen, dass alle Mathematiklehrer die gleichen Pullover tragen, indem er die Aussage

$$A(n): \text{„Je } n \text{ Mathematiklehrer tragen den gleichen Pullover."}$$

mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ nachweist. Er argumentiert dabei folgendermaßen:

- Der Induktionsanfang „$n = 1$" für nur einen einzigen Mathematiklehrer ist klar.
- Für den Induktionsschritt „$n \to n+1$" seien $n+1$ Mathematiklehrer vorgegeben. Man entferne einen von ihnen; die verbliebenen n Mathematiklehrer tragen nach Induktionsvoraussetzung alle den gleichen Pullover. Man füge den Lehrer wieder hinzu und entferne einen anderen; wieder tragen die restlichen n Mathematiklehrer den gleichen Pullover. Somit tragen aber *alle* $n+1$ Lehrer den gleichen Pullover.

Wie ist diese Argumentation zu beurteilen?

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 20.–22. Dezember 2017 behandelt.