

## 7. Tutoriumsblatt

**Aufgabe 1 (Bilder und Urbilder).** Es seien  $M, N$  Mengen,  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung und  $A \subset M$  eine Teilmenge.

- Zeigen Sie, dass  $A \subset f^{-1}(f(A))$  gilt.
- Geben Sie ein Beispiel an, in dem  $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$  gilt.

**Aufgabe 2 (Eigenschaften von Abbildungen).** Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x - \frac{1}{3})^2$
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x - \frac{1}{3})^2$
- $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} (x, y, z) \mapsto (xy, yz)$
- $k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ .

**Aufgabe 3 (Kompositionen von Abbildungen).** Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(x) = x + 1$$

und

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{falls } x \geq 2, \\ 1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie  $f$  und  $g$  sowie  $f \circ g$  und  $g \circ f$  auf Injektivität und Surjektivität.

**Aufgabe 4 (Einige Bijektionen).** Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Abbildung des folgenden Typs an:

- Eine bijektive Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ .
- Eine bijektive Abbildung  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ .
- Eine bijektive Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .