Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2017/18
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

Lösung des 5. Tutoriumsblatts

Aufgabe 1. Dass Addition und Multiplikation **kommutativ** sind, sieht man an der Symmetrie der Verknüpfungstabellen (Spiegelsymmetrie entlang der Achse „von Nordwest nach Südost"). Die erste Zeile (bzw. Spalte) der Additionstafel zeigt, dass $\overline{0}$ **neutrales Element der Addition** ist, denn ihre Einträge sind identisch mit denjenigen in der Beschriftung der Zeile (bzw. Spalte). Ebenso zeigt die zweite Zeile (bzw. Spalte) der Multiplikationstafel, dass $\overline{1}$ **neutrales Element der Multiplikation** ist. Die Existenz von **additiven Inversen** sieht man daran, dass in jeder Zeile (bzw. Spalte) der Additionstafel irgendwo das Element $\overline{0}$ auftaucht; die Existenz von **multiplikativen Inversen** daran, dass in jeder Zeile (bzw. Spalte) außer der des Elements $\overline{0}$ (damit bleibt hier nur diejenige des Elements $\overline{1}$ übrig) irgendwo das Element $\overline{1}$ auftaucht.
Dies waren diejenigen Körperaxiome, die sich bequem an den Verknüpfungstafeln ablesen lassen; die übrigen sind etwas mühsam:

- Für die **Assoziativität der Addition** ist die Gültigkeit der Gleichung

  $$a + (b + c) = (a + b) + c$$

  für alle $a, b, c \in K$ nachzuweisen. Da es für jede der Variablen zwei Möglichkeiten gibt (sie kann jeweils den Wert $\overline{0}$ oder $\overline{1}$ haben), sind damit im Prinzip $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Gleichungen zu überprüfen. Man kann sich die Arbeit aber erleichtern, indem man nicht alle Variablen gleichzeitig mit konkreten Werten belegt, und zwar folgendermaßen:

  - Ist $a = \overline{0}$, so ergibt die linke Seite der Gleichung stets den Wert $\overline{0} + (b + c) = b + c$ (denn $\overline{0}$ ist neutrales Element der Addition), die rechte Seite $(\overline{0}+b)+c = b+c$ wegen $\overline{0} + b = b$. In diesem Fall stimmt die Gleichung also.
  - Ist $b = \overline{0}$, so liefert die linke Seite $a + (\overline{0} + c) = a + c$, die rechte $(a + \overline{0}) + c = a + c$, auch hier ist also alles in Ordnung.
  - Ist $c = \overline{0}$, so liefert die linke Seite stets den Wert $a + (b + \overline{0}) = a + b$, die rechte den Wert $(a + b) + \overline{0} = a + b$, und die Gleichung stimmt auch hier.

  Es bleiben also nur die Fälle übrig, in denen keine der Variablen a, b, c den Wert $\overline{0}$ hat. Dies ist aber nur ein einziger Fall, nämlich $a = b = c = \overline{1}$, für den wir die Gleichung $\overline{1}+(\overline{1}+\overline{1}) = (\overline{1}+\overline{1})+\overline{1}$ überprüfen müssen. Aber er wird bereits von der Kommutativität erledigt, so dass wir fertig sind!

  (Diese Tricks funktionieren allgemein, auch für größere Körper: Die Fälle, in denen eine Variable das Nullelement ist oder alle drei Variablen gleich sind, lassen sich pauschal erledigen. Arbeitet man mit größeren Körpern, kann dann aber noch jede Menge Arbeit übrigbleiben.)

- Für die **Assoziativität der Multiplikation** ist die Gültigkeit der Gleichung

  $$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

  für alle $a, b, c \in K$ nachzuweisen. Genau wie bei der Assoziativität der Addition können wir argumentieren, wenn eine der Variablen den Wert $\overline{1}$ hat. Damit bleibt aber nur der Vergleich von $\overline{0} \cdot (\overline{0} \cdot \overline{0})$ mit $(\overline{0} \cdot \overline{0}) \cdot \overline{0}$ übrig, und der folgt wieder aus der Assoziativität.

(Bei größeren Körpern kann man sich von der dann noch übrigens etwas Arbeit ersparen, indem man zuerst direkt an der Multiplikationstafel überprüft, dass tatsächlich $0 \cdot \overline{a} = 0$ für alle $a \in K$ gilt, und damit dann die Fälle, in denen eine der Variablen das Nullelement ist, pauschal erledigt.)

- Für die **Distributivität** ist die Gültigkeit der Gleichung

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

für alle $a, b, c \in K$ zu überprüfen. Wieder sind dies 8 Gleichungen, die man zu Fuß überprüfen kann, und wieder kann man sich die Arbeit stattdessen erleichtern, wobei es nützlich ist, zuerst an der Multiplikationstafel zu überprüfen, dass $\overline{0} \cdot a = \overline{0}$ ist für alle $a \in K$ (das folgt im Prinzip aus den übrigen Körperaxiomen, aber da zum Beweis die Distributivität benötigt wird, können wir es noch nicht verwenden).

  - Ist $a = \overline{0}$, so liefert die linke Seite $\overline{0} \cdot (b+c) = \overline{0}$, die rechte Seite $\overline{0} \cdot b + \overline{0} \cdot c = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$, alles gut.
  - Ist $b = \overline{0}$, so liefert die linke Seite $a \cdot (\overline{0} + c) = a \cdot c$, die rechte Seite $a \cdot \overline{0} + a \cdot c = \overline{0} + a \cdot c = a \cdot c$, in Ordnung.
  - Der Fall $c = \overline{0}$ funktioniert genau wie der Fall $b = \overline{0}$ (er folgt sogar aus jenem aufgrund der Kommutativität der Addition).

Es bleibt also nur der Fall $a = b = c = \overline{1}$, also die Gleichung $\overline{1} \cdot (\overline{1} + \overline{1}) = \overline{1} \cdot \overline{1} + \overline{1} \cdot \overline{1}$. Aber beide Seiten ergeben (da ja $\overline{1}$ das Einselement ist) einfach $\overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$, und wir sind fertig.

(Auch der Fall $a = \overline{1}$ ließe sich noch pauschal behandeln, wenn wir nicht schon fertig wären.)

Aufgabe 2. Wir formen die Gleichung folgendermaßen um, wobei wir zwei Faustregeln anwenden, die sich bewährt haben:

- Tritt in einer Gleichung *eine* Wurzel auf, so versuchen wir sie (bevor wir ans Quadrieren gehen) auf einer Seite der Gleichung zu isolieren, also die Gleichung in die Form „$\sqrt{\text{krims}} = \text{krams}$“ zu bringen. **(Wichtig!)**
- Treten in einer Gleichung *zwei* Wurzeln auf, versuchen wir sie vor dem Quadrieren auf *verschiedene* Seiten der Gleichung zu bringen.

(Man probiere aus, was passiert, wenn man diese Faustregeln nicht beachtet: Die zweite Faustregel erspart nur gelegentlich einige Multiplikationen und ist eher Geschmackssache; die erste dagegen verhindert Katastrophen!)

$$\begin{aligned}
& && \sqrt{5x+10} - \sqrt{7-x} = 3 \\
& \iff && \sqrt{5x+10} = 3 + \sqrt{7-x} && \text{(quadrieren)} \\
\text{(!!)} \quad & \implies && 5x + 10 = (3 + \sqrt{7-x})^2 && \text{(binomische Formel)} \\
& \iff && 5x + 10 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7-x} + 7 - x \\
& \iff && 5x + 10 = 16 - x + 6 \cdot \sqrt{7-x} && \text{(zweite Faustregel)} \\
& \iff && 6x - 6 = 6 \cdot \sqrt{7-x} \\
& \iff && x - 1 = \sqrt{7-x} && \text{(erneut quadrieren)} \\
\text{(!!)} \quad & \implies && (x-1)^2 = 7 - x \\
& \iff && x^2 - 2x + 1 = 7 - x \\
& \iff && x^2 - x - 6 = 0.
\end{aligned}$$

Wie man solche quadratischen Gleichungen lösen kann, wissen wir aus der Schule (oder von Tutoriums- und Übungsblatt 4); die Lösungen sind hier 3 und -2.
Damit sind wir aber noch nicht fertig. Denn zum einen wissen wir (da in unserer Umformungskette auch Implikationspfeile $\Longrightarrow$ statt ausschließlich Äquivalenzpfeilen $\Longleftrightarrow$ vorkamen) nur: *Wenn* x eine Lösung der Ausgangsgleichung ist, *dann* ist $x \in \{3, -2\}$; anders gesagt: 3 und -2 sind die einzigen *möglichen* Lösungen. Zum anderen ist zu prüfen, ob die Lösungen überhaupt im Intervall $[-2, 7]$ liegen, wie in der Aufgabenstellung gefordert.
Letzteres ist für beide Kandidaten erfüllt, so dass wir mit beiden die Probe anhand der Ausgangsgleichung machen müssen: Für $x = 3$ ist

$$\sqrt{5x + 10} - \sqrt{7 - x} = \sqrt{5 \cdot x + 10} - \sqrt{7 - 3} = \sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3,$$

so dass $x = 3$ tatsächlich eine Lösung ist. Für $x = -2$ aber ist

$$\sqrt{5x + 10} - \sqrt{7 - x} = \sqrt{5 \cdot (-2) + 10} - \sqrt{7 - (-2)} = \sqrt{0} - \sqrt{9} = -3 \neq 3,$$

so dass $x = -2$ *keine* Lösung der Ausgangsgleichung ist.
Die Lösungsmenge ist also $L = \{3\}$.

Aufgabe 3.

a) Es ist $1 = 1^2 > 0$ wegen $1 \neq 0$ (in der Vorlesung wurde gezeigt, dass $a^2 > 0$ für $a \neq 0$ ist).

Alternativ kann man auch folgenden amüsanten Widerspruchsbeweis machen, der zugegebenermaßen etwas verwirrend ist:
Nehmen wir an, es sei $1 > 0$ falsch, also $1 \leq 0$. Da in einem Körper immer $1 \neq 0$ ist, folgt also $1 < 0$. Mit einem Lemma aus der Vorlesung gilt dann $-1 > 0$ und wir können das Monotoniegesetz der Multiplikation anwenden, woraus folgt: $(-1) \cdot (-1) > (-1) \cdot 0 \ \Rightarrow\ 1 > 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu $1 < 0$, womit unsere Annahme falsch sein muss. Es kann also nur $1 > 0$ sein. $\square$

b) Die Aussage ist richtig (es ist gegeben, dass „2" in einem allgemeinen Körper definiert ist als $1 + 1$, wobei 1 das Einselement des Körpers bezeichnet): Sei nämlich $a < b$. Nach dem Monotoniegesetz der Addition ist dann $a + b < b + b = 1 \cdot b + 1 \cdot b = (1 + 1) \cdot b = 2 \cdot b$ und ebenso $2a = a + a < a + b$. Insgesamt haben wir also die Kette $2a < a + b < 2b$. Um daraus die behauptete Ungleichung zu bekommen, können wir sie mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren und das Monotoniegesetz der Multiplikation verwenden. Dafür benötigen wir allerdings die Information, dass $\frac{1}{2} > 0$ ist: Aber wegen $0 < 1$ ist $1 = 0+1 < 1+1 = 2$, also $0 < 1 < 2$ und damit $0 < 2$, und laut Vorlesung folgt daraus $0 < \frac{1}{2}$.

c) Die Aussage ist im allgemeinen nicht richtig: Beispielsweise für $K = \mathbb{Q}$ und die Zahlen $a = -2$, $b = 1$ gilt $a < b$, aber in der Behauptung $4 < -2 < 1$ ist die erste Ungleichung falsch.

Aufgabe 4.

a) Es ist

$$x + y = a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2} = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

sowie

$$x \cdot y = (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

b) Da mit a, b, c, d auch $a + b$, $b + d$, $ac + 2bd$ und $ad + bc$ in $\mathbb{Q}$ liegen, folgt $x + y, x \cdot y \in K$ aus den Formeln aus Teil a). Wegen $-(a + b\sqrt{2}) = (-a) + (-b) \cdot \sqrt{2}$ und $-a, -b \in \mathbb{Q}$ folgt außerdem $-x \in K$.