Mathematisches Institut der Universität München | Prof. Dr. D. Rost
Wintersemester 2017/18 | M. Jeblick, S. Aristarhov
Grundlagen der Mathematik I

5. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Ein Körper mit zwei Elementen). Auf der Menge $K = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ mit den Elementen $\overline{0} \neq \overline{1}$ wird eine Addition $+$ sowie eine Multiplikation $\cdot$ definiert durch Angabe der Verknüpfungstabellen

$$\begin{array}{c|cc} + & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \end{array}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit Nullelement $\overline{0}$ und Einselement $\overline{1}$ ist.

Bemerkung: Die Querstriche über $\overline{0}$ und $\overline{1}$ haben bislang keine eigene Bedeutung; sie sind als Teil des *Namens* der Elemente zu sehen. Unsere Schreibweise betont, daß es sich *nicht* um die natürlichen Zahlen „Null“ und „Eins“ handelt, man hätte auch jeden anderen Namen nehmen können.

Aufgabe 2 (Lösen von Gleichungen). Bestimmen Sie die Elemente der Menge

$$L = \left\{ x \in [-2, 7] \,\middle|\, \sqrt{5x + 10} - \sqrt{7 - x} = 3 \right\}.$$

Dabei dürfen Schulkenntnisse über das Rechnen mit Wurzeln verwendet werden.

Aufgabe 3 (Ungleichungen). Sei $(K, +, \cdot, <)$ ein angeordneter Körper. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Es ist stets $0 < 1$ (wobei 0 das Null- und 1 das Einselement von K bezeichnet).

b) Für alle $a, b \in K$ mit $a < b$ gilt $a < \frac{a+b}{2} < b$. (Bemerkung: Hier ist die Zahl 2 definiert als $1 + 1$ und wir nehmen an, dass $2 \neq 0$.)

c) Für alle $a, b \in K$ mit $a < b$ gilt $a^2 < a \cdot b < b^2$.

Aufgabe 4 (Ein weiterer Körper). Für den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ betrachten wir die Teilmenge $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

a) Berechnen Sie die Summe und das Produkt von $x = a + b\sqrt{2}$ und $y = c + d\sqrt{2}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie, dass mit x und y auch $x + y$, $x \cdot y$ sowie $-x$ in K liegen.

Bemerkung: De facto ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Dieses Blatt wird in den Tutorien im Zeitraum 22.–24. November 2017 behandelt.