Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

Lösung des 4. Tutoriumsblatts

Aufgabe 1.

a) Für die Summen:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2},$$
$$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6},$$
$$\sum_{k=1}^{3} \frac{k}{k+1} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}_{=\frac{7}{6}} + \frac{3}{4} = \frac{23}{12},$$
$$\sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k+1} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}}_{=\frac{23}{12}} + \frac{4}{5} = \frac{163}{60},$$
$$\sum_{k=1}^{5} \frac{k}{k+1} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}}_{=\frac{163}{60}} + \frac{5}{6} = \frac{71}{20}.$$

Für die Produkte:

$$\prod_{k=1}^{1} \frac{2k}{k+1} = \frac{2}{2} = 1,$$
$$\prod_{k=1}^{2} \frac{2k}{k+1} = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3},$$
$$\prod_{k=1}^{3} \frac{2k}{k+1} = 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{4} = 2,$$
$$\prod_{k=1}^{4} \frac{2k}{k+1} = \underbrace{1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{4}}_{=2} \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5},$$
$$\prod_{k=1}^{5} \frac{2k}{k+1} = \underbrace{1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{5}}_{=\frac{16}{5}} \cdot \frac{10}{6} = \frac{16}{3}.$$

b) Bei der Summe kann man erkennen, dass die Nenner alle geraden Zahlen zwischen 2 und 100 durchlaufen und die Zähler jeweils um 1 kleiner sind als die Nenner. Jeder Summand hat also die Form $\dfrac{2k-1}{2k}$ für $k = 1, \ldots, 50$, so dass die Summe darstellbar ist als

$$\sum_{k=1}^{50} \frac{2k-1}{2k}.$$

Beim Produkt ist erkennbar, dass die Zähler die natürlichen Zahlen durchlaufen, die Nenner aber in jedem Glied um 3 anwachsen, und zwar ist der Nenner stets um 1 kleiner als das 3-fache des Zählers. Das bedeutet, dass jeder Faktor die Form $\dfrac{k}{3k-1}$ für $k = 1, \ldots, 50$ hat, und das gesamte Produkt ist damit darstelbar als

$$\prod_{k=1}^{50} \frac{k}{3k-1}.$$

c) Ausgeschrieben hat dieses Produkt die Form

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{99}}{100} = \frac{1}{100}.$$

Bemerkung. Produkte, in denen Vergleichbares passiert, nennt man auch *Teleskopprodukte*; warum? Wie sehen entsprechende Summen, sogenannte *Teleskopsummen*, aus?

Aufgabe 2.

a) (ii) $\Longrightarrow$ (i) ist klar.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Die Aussage $x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$ ist für alle $x \in K$ wahr, also insbesondere für $x = 0$, und das bedeutet $b = d$. Dann können wir aber diesen gemeinsamen Wert von beiden Seiten der Gleichung abziehen und erhalten $x^2 + ax = x^2 + cx$ für alle $x \in K$; insbesondere für $x = 1$ bedeutet das $1 + a = 1 + c$, also $a = c$.

b) Für alle $x \in K$ ist stets $(x+s)(x+t) = x^2 + (s+t)x + s \cdot t$. Nach a) liefert dieser Ausdruck genau dann für alle $x \in K$ den gleichen Wert wie $x^2 + ax + b$, wenn $a = s + t$ und $b = s \cdot t$ ist.

(Es ist auch ein Beweis ohne Rückgriff auf a) möglich; dann wird man wahrscheinlich beide Richtungen einzeln bearbeiten und ein Argument wie im Beweis von a) verwenden müssen.)

c) Wir versuchen, $s, t \in \mathbb{Q}$ zu finden, so dass $x^2 + 5x - 24 = (x + s)(x + t)$ ist: nach b) muss dafür genau $s + t = 5$ und $s \cdot t = -24$ sein. Mit etwas Probieren sieht man, dass $s = 8$, $t = -3$ eine mögliche Lösung ist. (Das ist natürlich auch die einzige, wenn man von der Möglichkeit der Vertauschung der Buchstaben, also $s = -3$, $t = 8$, absieht.)

Damit ist also $x^2 + 5x - 24 = (x + 8)(x - 3)$ für alle $x \in K$. Da ein Produkt in einem Körper nur dann verschwindet (d.h. den Wert Null hat), wenn einer der Faktoren null ist, ist $x^2 + 5x - 24 = 0$ genau wahr, wenn $x + 8 = 0$ oder $x - 3 = 0$ ist, wenn also $x = -8$ oder $x + 3$ ist. Die Lösungsmenge ist also $\{-8, 3\}$.

Aufgabe 3. Nach Definition ist $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

a) Es ist

$$\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = (a \cdot d) \cdot (b \cdot d)^{-1} = a \cdot \underbrace{d \cdot d^{-1}}_{=1} \cdot b^{-1} = a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$$

unter Verwendung der Assoziativität der Multiplikation sowie der Beziehung $(b \cdot d)^{-1} = d^{-1} \cdot b^{-1}$, die aus $d^{-1} \cdot b^{-1} \cdot (b \cdot d) = d^{-1} \cdot b^{-1} \cdot b \cdot d = d^{-1} \cdot d = 1$ sowie der Eindeutigkeit des Inversen folgt.

b) Nach a) ist

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = (ad) \cdot (bd)^{-1} - (cb) \cdot (bd)^{-1} = (ad - cb) \cdot (bd)^{-1} = \frac{ad - cb}{bd}$$

unter Verwendung des Distributivgesetzes.

Aufgabe 4. Um beide Seiten der Gleichung sinnvoll miteinander vergleichen zu können, bringen wir sie auf den gemeinsamen Nenner $x^2 \cdot (x+1)^2$. Wegen

$$\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 \cdot (x+1)}{x^2 \cdot (x+1)^2} - \frac{(x+1)^2}{x^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x^2 - (x^2 + 2x + 1)}{x^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 \cdot (x+1)^2}$$

und

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{2x \cdot (x+1)^2}{x^2 \cdot (x+1)^2} - \frac{3x^2}{x^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 + 2x + 1) - 3x^2}{x^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{2x^3 + x^2 + 2x}{x^2 \cdot (x+1)^2}$$

gilt also für $x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0\}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2} \\
\iff \quad & \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{2x^3 + x^2 + 2x}{x^2 \cdot (x+1)^2} \\
\iff \quad & 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 2x^3 + x^2 + 2x \\
\iff \quad & -2x - 1 = 2x \\
\iff \quad & -1 = 4x \\
\iff \quad & -\frac{1}{4} = x.
\end{aligned}$$

Da $x = -\frac{1}{4}$ auch tatsächlich in $\mathbb{Q} \setminus \{-1, 0\}$ liegt, ist damit $L = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$.