

4. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Summen- und Produktzeichen):

a) Berechnen Sie für $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^n \frac{2k}{k+1}.$$

b) Schreiben Sie

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{99}{100} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \dots \cdot \frac{50}{149}$$

mit Hilfe des Summen- bzw. Produktzeichens.

c) Bestimmen Sie den Wert des Produkts

$$\prod_{k=1}^{99} \frac{k}{k+1}.$$

Aufgabe 2 (Quadratische Gleichungen in Körpern):

 Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie:

a) Für $a, b, c, d \in K$ sind äquivalent:

- (i) Es ist $x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$ für alle $x \in K$.
- (ii) Es ist $a = c$ und $b = d$.

b) (*Regel von Vieta*) Für $a, b, s, t \in K$ sind äquivalent:

- (i) Es ist $x^2 + ax + b = (x + s)(x + t)$ für alle $x \in K$.
- (ii) Es ist $a = s + t$ und $b = s \cdot t$.

c) Lösen Sie für $K = \mathbb{Q}$ die Gleichung $x^2 + 5x - 24 = 0$ mit Hilfe von b).

Aufgabe 3 (Rechenregeln für Brüche):

 Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$:

a) $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$

b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$

Aufgabe 4 (Lösen von Gleichungen):

 Geben Sie die Elemente folgender Menge an:

$$L = \left\{ x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0\} \mid \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2} \right\}.$$