Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 3. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1. Zum Beweis der Gleichheit zweier Mengen, $X = Y$, beweist man oft die beiden Inklusionen $X \subset Y$ und $X \supset Y$; hier also

$$\begin{aligned} &(M \cup N) \setminus (M \cap N) \subset (M \setminus N) \cup (N \setminus M) \\ \text{und} \quad &(M \cup N) \setminus (M \cap N) \supset (M \setminus N) \cup (N \setminus M). \end{aligned}$$

- „$\subset$". Sei $x \in (M \cup N) \setminus (M \cap N)$. Dann liegt x in M oder in N, aber nicht in beiden Mengen – anders gesagt, x liegt *entweder* in M *oder* in N. Im ersten Fall liegt x in $M \setminus N$, im zweiten Fall in $N \setminus M$; also liegt x in jedem Fall in $(M \setminus N) \cup (N \setminus M)$.
- „$\supset$". Sei $x \in (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$, also liegt x in $M \setminus N$ oder in $N \setminus M$. In beiden Fällen liegt x in $M \cup N$; im ersten Fall aber liegt x nicht in N, im zweiten nicht in M – also liegt x in keinem Fall in $M \cap N$, und das zeigt $x \in (M \cup N) \setminus (M \cap N)$.

Alternativ (und kürzer) können die De Morganschen Regeln benutzt werden (siehe 2.8. im Skript). Seien A, B, C Mengen. Dann ist $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Angewendet auf $A = M \cup N$, $B = M$, $C = N$ liefert das

$$(M \cup N) \setminus (M \cap N) = ((M \cup N) \setminus M) \cup ((M \cup N) \setminus N)$$

Nun ist aber $(M \cup N) \setminus M = (M \setminus M) \cup (N \setminus M) = (N \setminus M)$ und $(M \cup N) \setminus N = (M \setminus N) \cup (N \setminus N) = (M \setminus N)$. Dies ergibt

$$(M \cup N) \setminus (M \cap N) = (N \setminus M) \cup (M \setminus N)$$

und dies war zu zeigen.

Aufgabe 2.

a) Diese Aussage ist wahr. Beweis: Sind a und b gerade, so gibt es nach Definition des Begriffes „gerade" Zahlen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2k$ und $b = 2\ell$. Dann ist aber $a + b = 2k + 2\ell = 2 \cdot (k + \ell)$ wieder eine gerade Zahl, und $a \cdot b = 2k \cdot 2\ell = 2 \cdot (2k\ell)$ ist ebenfalls gerade.

b) Diese Aussage ist falsch; beispielsweise ist $a = b = 1$ ein Gegenbeispiel ($a + b = 2$ ist gerade, aber $a \cdot b = 1$ ist ungerade).

Aufgabe 3.

a) Es ist $N = \{(-2)^4, 0^4, 1^4, 2^4, 3^4\} = \{0, 1, 16, 81\}$. Ein Paar $(x, y) \in M \times N$ kann nur dann die Eigenschaft $x = y$ haben, wenn x (und y) in $M \cap N = \{0, 1\}$ liegt. Also ergibt sich

$$\{(x, y) \in M \times N \mid x = y\} = \{(0, 0), (1, 1)\}\,.$$

Für die zweite Menge mssen wir für jedes Element $y \in N$ alle Elemente $x \in M$ mit $x + y > 18$ „abklappern". Für $y = 81$ können wir $x \in M$ frei wählen. Für $y = 16$ muss $x = 3$ sein, damit $x + y > 18$ gilt. Für die restlichen Elemente $0, 1$ in N existiert kein $x \in M$, so dass $x + y > 18$ ist. Das ergibt

$$\{(x, y) \in M \times N \mid x + y > 18\} \quad = \quad \{(-2, 81), (0, 81), (1, 81), (2, 81), (3, 81), (3, 16)\}.$$

b) Die Menge $M \times N$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} M \times N =& (\{0\} \cup [1,2]) \times (\{-2,-1\} \cup [0,1]) \\ =& \{0\} \times \{-2,-1\} \cup [1,2] \times \{-2,-1\} \cup \{0\} \times [0,1] \cup [1,2] \times [0,1] \end{aligned}$$

Dies führt zu folgender Skizze:

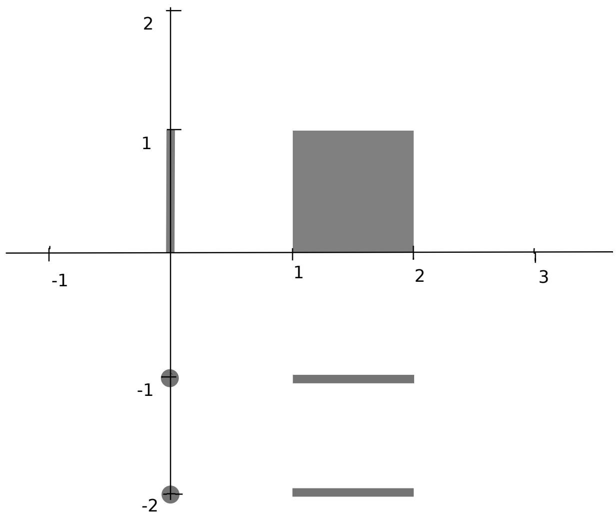

Abbildung 1: Skizze der Menge $M \times N$.

Aufgabe 4.

a) Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\}\,, \\ \mathcal{P}(\{1\}) &= \{\emptyset, \{1\}\}\,, \\ \mathcal{P}(\{1,2\}) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}\,, \\ \mathcal{P}(\{1,2,3\}) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}\,. \end{aligned}$$

b) In Teilaufgabe a) erhielten wir der Reihe nach 1, 2, 4 und 8 Elemente. Dies sind alles Zweierpotenzen, und man könnte nun vermuten, dass $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$ immer 2^n Elemente hat. Dies trifft zu, und später werden wir es auch beweisen können.

c) Die Menge N_1 besitzt genau zwei Elemente, nämlich $\emptyset$ und $\{1\}$. Ihre Potenzmenge berechnet sich also genauso wie diejenige von M_2, nmlich ist $\mathcal{P}(N_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$.

Die Menge N_2 besitzt genau ein Element, nämlich $\{1, 2\}$, so da ihre Potenzmenge sich berechnet wie die von M_1. Es ist also $\mathcal{P}(N_2) = \{\emptyset, \{\{1, 2\}\}\}$.

Die Menge $N_1 \cup N_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ enthält drei Elemente, so dass ihre Potenzmenge sich wie die von M_3 berechnet zu

$$\mathcal{P}(N_1 \cup N_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{1,2\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{1,2\}\}, \{\{1\}, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}\}.$$