Prof. Dr. D. Rost
S. Aristarkhov, M. Jeblick

Lösung des 2. Tutoriumsblatts

Aufgabe 1.

a) Wir unterdrücken unseren Unmut, eine falsche Aussage zu schreiben, und formulieren die Verneinung der Aussage wie folgt:

$$\exists x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \text{ mit } x^2 \leq y^2 \wedge x > y$$

b) Die Aussage ohne die Einschränkung lautet

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt: } x^2 \leq y^2 \Longrightarrow x \leq y. \tag{1}$$

Diese Aussage ist falsch, da wir ein Gegenbeispiel finden können. Zum Beispiel betrachten wir $x = 0, y = -1$, dann gilt

$$x^2 = 0 \leq 1 = y^2,$$

aber gleichzeitig ist

$$0 > -1.$$

Damit gilt die Verneinung obiger Aussage (1),

$$\exists x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x^2 \leq y^2 \wedge x > y.$$

also ist die Aussage (1) falsch.

c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ beliebig. Es gilt

$$(a-b)^2 \geq 0,$$

was sich mit Hilfe der binomischen Formeln zu

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

umformen lässt. Wir können auf beiden Seiten $4ab$ addieren und erhalten

$$a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab.$$

Dies ist unter Benutzung einer binomischen Formel äquivalent zu

$$4ab \leq (a+b)^2$$

Nun können wir $(\star)$ benutzen, da sowohl $4ab$ als auch $(a+b)^2$ nicht negativ sind, es folgt

$$\sqrt{4ab} \leq a + b$$

was äquivalent ist zu

$$2\sqrt{ab} \leq a + b \Longleftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Dies war zu beweisen.

Aufgabe 2.

a) Sei $z \in \mathbb{Z}$, sodass $A(z)$ gilt, d.h. z ist ungerade. Per Definition bedeutet dies, es gibt eine ganze Zahl k, sodass $z = 2k + 1$. Nun können wir einfach das Quadrat von z ausrechnen:

$$z^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Also lässt sich auch z^2 in der Form $z^2 = 2l + 1$ schreiben, wobei hier $l = 2k^2 + 2k$ ist. Somit ist $B(z)$ wahr und die Aussage bewiesen.

b) In diesem indirekten Beweis zeigen wir die zu $B(z) \Longrightarrow A(z)$ äquivalente Aussage $\neg A(z) \Longrightarrow \neg B(z)$. Sei also $z \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $\neg A(z)$. Das heißt z ist nicht ungerade, also ist z gerade. Somit existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = 2k$. Quadrieren ergibt

$$z^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Man sieht also, dass auch z^2 gerade ist. Damit ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 3.

a) Wir formalisieren die Aussagen wie folgt:

$$P : \forall x \in M \ \exists y \in S : V(x, y)$$

$$Q : \exists y \in S \ \forall x \in M : V(x, y)$$

b) Beginnen wir mit der Frage, ob P hinreichend für Q ist, das heißt ob $P \Longrightarrow Q$. Dies ist **falsch**. Wenn jeder Mensch mindestens eine Sprache versteht, kann man daraus nicht schließen, dass es eine Sprache gibt, die alle verstehen. (Man könnte sich zum Beispiel vorstellen, das jeder Mensch nur seine eigene Sprache hat, die er mit niemandem teilt, dann gilt Q sicher nicht.)
Umgekehrt ist aber P notwendig für Q, d.h. $Q \Longrightarrow P$ ist **wahr**. Wenn es eine Sprache gibt, die jeder einzelne Mensch versteht, so spricht ja jeder Mensch auch mindestens eine Sprache (diese Universalsprache eben) und P ist erfüllt.

c) Wir negieren die Aussagen:

$$\neg P : \exists x \in M \ \forall y \in S : \neg V(x, y)$$

Sprachlich: Es gibt (mindestens) einen Menschen, der keine Sprache versteht.

$$\neg Q : \forall y \in S \ \exists x \in M : \neg V(x, y)$$

Sprachlich: Für jede Sprache gibt es mindestens einen Menschen, der sie nicht versteht. Oder auch: Es gibt keine Sprache, die jeder Mensch versteht.

d) Diese Aufgabe können wir auf zwei Weisen lösen, zum einen durch erneutes Nachdenken: Es gilt $(\neg Q \Longrightarrow \neg P)$ ist falsch, also ist $\neg P$ nicht notwendig für $\neg Q$, denn es kann genau wie oben z.B. der Fall sein, dass jeder seine eigene Sprache spricht, aber es keine Universalsprache gibt. Entsprechend ist $\neg P$ hinreichend für $\neg Q$, da der Mensch aus Aussage $\neg P$, der keine Sprache versteht, die Möglichkeit einer Sprache, die alle Menschen verstehen, sofort zerstört.
Die schnellere Methode ist das Ausnutzen der bekannten Äquivalenzregeln für die Implikation. Da gilt:

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$$

sowie

$$(Q \Longrightarrow P) \Longleftrightarrow (\neg P \Longrightarrow \neg Q),$$

ist sofort aus Teilaufgabe b) ersichtlich, dass $(\neg Q \Longrightarrow \neg P)$ falsch und $(\neg P \Longrightarrow \neg Q)$ wahr ist.

Aufgabe 4.

a) Behauptung: $A \subset B$ ist genau dann wahr, wenn $x = 1$ und $a \in \{1, 5, 7\}$
Beweis: Damit A eine Teilmenge von B ist, müssen alle Elemente von A auch in B enthalten sein. Da $1 \in A$, muss also $1 \in B$ gelten, was genau dann möglich ist, wenn $x = 1$. In diesem Fall haben wir also $A = \{a, 1, 1\} = \{a, 1\}$ und $B = \{1, 5, 7\}$, also ist offenbar $A \subset B$ genau dann erfüllt, wenn auch $a \in B = \{1, 5, 7\}$.

b) Behauptung: $A = B$ ist für alle $x, a \in \mathbb{R}$ falsch.
Beweis: Die Gleichheit $A = B$ ist äquivalent zu $A \subset B \wedge B \subset A$. Damit $A \subset B$ gilt, muss laut Aufgabenteil a) bereits $x = 1$ sein. Dann aber hat A nur höchstens zwei (verschiedene) Elemente und B hat drei, womit die Mengen in keinem Fall gleich sein können.

c) Behauptung $A \cup B = \{1, 5, 7, 9\}$ ist genau dann wahr, wenn $x = 1$ und $a = 9$.
Beweis: Nach Definition der Vereinigungsmenge gilt

$$A \cup B = \{a, x, x^2, 1, 5, 7\}$$

Damit diese Menge gleich der Menge $\{1, 5, 7, 9\}$ sein kann, muss sie genau vier (verschiedene) Elemente beinhalten. Wir können alle Möglichkeiten, zuerst die für x, durchprobieren:

- $x = 9$ geht nicht, da $9^2 = 81 \notin \{1, 5, 7, 9\}$.
- $x = 7$ geht nicht, da $7^2 = 49 \notin \{1, 5, 7, 9\}$.
- $x = 5$ geht nicht, da $5^2 = 25 \notin \{1, 5, 7, 9\}$.
- $x = 1$ kann funktionieren, da $x^2 = x = 1 \in \{1, 5, 7, 9\}$. In diesem Fall muss aber noch $a = 9$ sein, um Gleichheit der Mengen sicherzustellen.