Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2017/18
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
S. Aristarkhov, M. Jeblick

Lösung des 1. Tutoriumsblatts

Aufgabe 1. Wir definieren zuerst die Abkürzungen

F : „Jemand tritt im Zirkus *In Flagranti* auf.“,
T : „Jemand hat Talent.“,
E : „Jemand erfindet sich immer wieder neu.“,
B : „Jemand begeistert sein Publikum.“,
W : „Jemand ist ein wahrer Kï¿$\frac{1}{2}$nstler.“

Mit diesen Abkürzungen können wir die Aussagen wie folgt formalisieren:

- Wenn jemand sich immer wieder neu erfindet, dann hat er Talent: $E \Longrightarrow T$
- Wer die Zuschauer nicht begeistern kann, ist kein wahrer Künstler: $\neg B \Longrightarrow \neg W$
- Jemand, der sich nicht immer wieder neu erfindet, kann die Zuschauer nicht begeistern: $\neg E \Longrightarrow \neg B$
- Nur ein wahrer Künstler tritt im Zirkus *In Flagranti* auf. $F \Longrightarrow W$

Um die Aussagen zu vereinfachen, benutzen wir, dass $\neg B \Longrightarrow \neg W$ zu $W \Longrightarrow B$ äquivalent ist (Wenn jemand ein wahrer Künstler ist, dann kann er die Zuschauer begeistern.) Analog dazu ist

$$\neg E \Longrightarrow \neg B$$

äquivalent zu

$$B \Longrightarrow E.$$

Damit sehen wir, dass sich eine Kette von Implikationen ergibt:

$$F \Longrightarrow W \Longrightarrow B \Longrightarrow E \Longrightarrow T$$

Jemand, der im Zirkus *In Flagranti* auftreten darf, muss also notwendigerweise alle vier genannten Eigenschaften besitzen.

Aufgabe 2.

a) Betrachten wir die Wahrheitstafeln,

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

so sehen wir, dass die Aussagen $\neg(A \vee B)$ und $\neg A \wedge \neg B$ unabhängig davon, ob A und B wahr oder falsch sind, immer denselben Wahrheitswert besitzen, also äquivalent sind.

b) In diesem Fall stellen wir folgende Wahrheitstafel auf:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$\neg B$	$A \Leftrightarrow \neg B$	$\neg A$	$\neg A \Leftrightarrow B$
w	w	w	f	f	f	f	f
w	f	f	w	w	w	f	w
f	w	f	w	f	w	w	w
f	f	w	f	w	f	w	f

Die drei Aussagen $\neg(A \iff B)$ und $A \iff \neg B$ und $\neg A \iff B$ haben also auch immer denselben Wahrheitswert, womit sie äquivalent sind.

Aufgabe 3.

$$(P \Longrightarrow Q \vee R) \quad \iff \quad ((\ ?\ \wedge P) \Longrightarrow R)$$

Anstelle des Fragezeichens muss natürlich eine Aussage kommen, die mit Q zu tun hat, sonst kann nie eine Tautologie entstehen. Wir behaupten, dass eine Tautologie entsteht, wenn man das Fragezeichen durch $\neg Q$ ersetzt, also

$$(P \Longrightarrow Q \vee R) \quad \iff \quad ((\ \neg Q\ \wedge P) \Longrightarrow R)$$

Prüfen wir dies anhand einer Wahrheitstafel nach:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \Rightarrow Q \vee R$	$\neg Q \wedge P$	$(\neg Q \wedge P) \Rightarrow R$
w	w	w	w	w	f	w
w	w	f	w	w	f	w
w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	f
f	w	w	w	w	f	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w
f	f	f	f	w	f	w

Die Wahrheitswerte stammen bei jeder Kombination von Wahrheitswerten für P, Q, R überein, somit haben wir tatsächlich eine Tautologie.

Aufgabe 4. Wir stellen die entsprechende Wahrheitstafel auf, im ersten Fall haben wir:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge Q$	$((P \Rightarrow Q) \wedge Q) \Rightarrow P$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	w

Falls P falsch und Q wahr ist (3. Zeile), ist die Aussage $((P \Longrightarrow Q) \wedge Q) \Longrightarrow P$ falsch, sie ist also nicht allgemeingültig!
Fur die zweite Aussage sieht die Wahrheitstafel wie folgt aus:

P	Q	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q$	$((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$
w	w	f	w	f	w
w	f	w	f	f	w
f	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w

Offenbar ist die Aussage $((P \implies Q) \wedge \neg Q) \implies \neg P$ immer wahr, also allgemeingültig (eine Tautologie)!
Hier ist noch ein anderer Weg, um sich das klarzumachen. Wir wissen schon, dass folgende Aussage immer wahr ist:

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$$

Damit können wir die Aussage $((P \implies Q) \wedge \neg Q) \implies \neg P$ umschreiben als

$$((\neg Q \implies \neg P) \wedge \neg Q) \implies \neg P,$$

und dies ist wegen der Regel für die Implikation "$\implies$" offensichtlich eine Tautologie.