Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2017/18
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

Lösung des 13. Tutoriumsblatts

Aufgabe 1.

a) (i) Eine Verlosung der Zimmer würde so funktionieren, daß jeder der vier Touristen eine Kugel aus einer Urne zieht, wobei jede Kugel mit der Nummer eines Zimmers beschriftet ist (noch einfacher wäre es, direkt die Zimmerschlüssel aus einer Urne zu ziehen – das wird aber im Fall (ii) nicht mehr möglich sein). Dafür gibt es

$$\frac{7!}{(7-4)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

mögliche Ergebnisse (4-maliges Ziehen aus einer Urne mit 7 Kugeln ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge).

(ii) Wenn die Zimmer auch mehrfach belegt werden können, ändern sich die Spielregeln nur dahingehend, daß *mit* Zurücklegen gezogen wird. Die Anzahl der möglichen Ergebnisse ist dann $7^4 = 2401$ (4-maliges Ziehen aus einer Urne mit 7 Kugeln mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge)

b) Da für den Wirt die Touristen alle gleich aussehen (weil ihn nur die Anzahl von Gästen in jedem Zimmer interessiert), ändert sich das Modell dahingehend, daß nun *ohne* Beachtung der Reihenfolge gezogen wird.

(i) Im Fall von Einfachbelegung der Zimmer gibt es nun

$$\binom{7}{4} = 35$$

mögliche Belegungen (4-maliges Ziehen aus einer Urne mit 7 Kugeln ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge).

(ii) Im Fall von möglicher Mehrfachbelegung gibt es nun

$$\binom{7+4-1}{4} = \binom{10}{4} = 210$$

mögliche Belegungen (4-maliges Ziehen aus einer Urne mit 7 Kugeln mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge).

Aufgabe 2.

a) Es ist

$$\begin{aligned}\sigma \circ \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 5 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\tau\circ\sigma &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&7&5&8&3&4&1&6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&1&3&7&8&2&4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&2&5&1&6&7&8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(immer daran denken, die Komposition „von rechts nach links“ abzuarbeiten!). Außerdem ist

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&4&8&2&1&5&6\end{pmatrix}$$

und

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&1&5&6&3&8&2&4\end{pmatrix}$$

(Lesen der gegebenen Permutation „von unten nach oben“).

b) Das gelingt durch Auflösen: Es gilt $\sigma\circ\alpha=\tau \iff \alpha=\sigma^{-1}\circ\tau$, also tut

$$\begin{aligned}\alpha := \sigma^{-1}\circ\tau &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&4&8&2&1&5&6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&7&5&8&3&4&1&6\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&5&2&6&4&8&3&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

das Gewünschte. Ebenso gilt $\beta\circ\sigma=\tau \iff \beta=\tau\circ\sigma^{-1}$, also tut

$$\begin{aligned}\beta := \tau\circ\sigma^{-1} &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&7&5&8&3&4&1&6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&4&8&2&1&5&6\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&8&6&7&2&3&4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

das Verlangte.

c) Um σ als Produkt von (sogar disjunkten) *Zyklen* zu schreiben, führt man das folgende Selbstgespräch:

> *Beginnen wir mit der* 1*. Es ist* $\sigma(1)=6$*; die* 6 *geht weiter auf die* 8*, diese auf die* 4*, dann weiter auf die* 3*, und die* 3 *geht zurück auf die* 1*. Also notiere ich schon einmal den Zyklus* $(1\ 6\ 8\ 4\ 3)$*.*
> *Die erste noch nicht bearbeitete Zahl ist die* 2*; sie geht auf* $\sigma(2)=5$*, die* 5 *weiter auf die* 7*, und die zurück auf die* 2*. Also notiere ich den Zyklus* $(2\ 5\ 7)$*. Jetzt habe ich alle Zahlen bearbeitet und bin fertig; die Lösung bekomme ich durch Komposition der erhaltenen Zyklen in beliebiger Reihenfolge:*
>
> $$\sigma = (1\ 6\ 8\ 4\ 3)\circ(2\ 5\ 7) = (2\ 5\ 7)\circ(1\ 6\ 8\ 4\ 3).$$

Um σ sogar als Produkt von *Transpositionen* zu schreiben, wendet man auf die schon gewonnene Darstellung als Produkt von Zyklen eine der Formeln aus der Vorlesung an, die Zyklen in Transpositionen zerlegen: Es ist

$$\begin{aligned}(1\ 6\ 8\ 4\ 3) &= (1\ 6)\circ(6\ 8)\circ(8\ 4)\circ(4\ 3)\\ \textit{oder:}\quad &= (1\ 3)\circ(1\ 4)\circ(1\ 8)\circ(1\ 6),\end{aligned}$$

und durch Verwendung einer ähnlichen Zerlegung für $(2\ \ 5\ \ 7)$ ergibt sich schließlich

$$\sigma = \underbrace{(1\ \ 6) \circ (6\ \ 8) \circ (8\ \ 4) \circ (4\ \ 3)}_{=(1\ \ 6\ \ 8\ \ 4\ \ 3)} \circ \underbrace{(2\ \ 5) \circ (5\ \ 7)}_{=(2\ \ 5\ \ 7)}$$

als eine von vielen verschiedenen möglichen Lösungen.

Das gleiche Spiel liefert für die Permutation τ zunächst

$$\tau = (1\ \ 2\ \ 7) \circ (3\ \ 5) \circ (4\ \ 8\ \ 6)$$

und damit beispielsweise

$$\tau = (1\ \ 2) \circ (2\ \ 7) \circ (3\ \ 5) \circ (4\ \ 8) \circ (8\ \ 6).$$

d) In c) haben wir gesehen, daß σ sich als Produkt von 6 Transpositionen schreiben läßt, also ist σ eine *gerade* Permutation, d.h. $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$.

Ebenso ist τ als Produkt von 5 Transpositionen eine *ungerade* Permutation, d.h. $\operatorname{sign}(\tau) = -1$.

Aufgabe 3. Es wird nützlich sein, $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zu setzen. Die folgenden Überlegungen beruhen auf der Tatsache, dass man jede Permutation $\sigma \in S_5$ als Komposition (Produkt) paarweise disjunkter Zyklen schreiben kann.

- $k = 0$: Ein $\sigma \in S_5$ mit $k = 0$ Fixpunkten „bewegt“ alle 5 Zahlen $i \in M$, ist also von der Form

	i) $\sigma = (a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e)$	(5-Zyklus)
oder	ii) $\sigma = (a\ \ b\ \ c) \circ (d\ \ e)$	(ein 3-Zyklus und ein 2-Zyklus).

Anzahl der σ in i):

$$\binom{5}{5} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \ = \ 24,$$

denn: Es gibt $\binom{5}{5} = 1$ Möglichkeit, 5 Zahlen aus M für den 5-Zyklus $(a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e)$ auszuwählen.
Zum Zählen der 5-Zyklen $(a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e)$ bemerken wir, dass wir ihn stets so schreiben können, dass er die Form $(a\ \ ?\ \ ?\ \ ?\ \ ?)$ hat, also mit a (z.B. $a = 1$) beginnt. Für die nächste Zahl gibt es dann 4 Möglichkeiten, für die dritte noch 3, für die vierte noch 2, und die letzte ist dann festgelegt. Diese 5-Zyklen sind auch alle verschieden, daher gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedene 5-Zyklen bei gegebener Trägermenge $\{a, b, c, d, e\}$.

Anzahl der σ in ii):

$$\binom{5}{3} \cdot 2 \cdot 1 \ \cdot \binom{2}{2} \cdot 1 \ = \ 20,$$

denn: Es gibt $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten, 3 Zahlen aus M für den 3-Zyklus $(a\ \ b\ \ c)$ auszuwählen.
Nun kann jeder 3-Zyklus bei fest gewählten a, b, c in der Form $(a\ \ ?\ \ ?)$ geschrieben werden, also gibt es $2 \cdot 1$ verschiedene 3-Zyklen bei gegebener Trägermenge $\{a, b, c\}$.
Danach gibt es $\binom{2}{2} = 1$ Möglichkeiten, 2 weitere Zahlen aus M für den 2-Zyklus $(d\ \ e)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden.

Also gibt es insgesamt $24 + 20 = 44$ Permutationen $\sigma \in S_5$ mit genau $k = 0$ Fixpunkten.

- $k = 1$: Ein $\sigma \in S_5$ mit $k = 1$ Fixpunkten „bewegt" 5-1 $= 4$ Zahlen $i \in M$, ist also von der Form

$$\begin{array}{rll} & \text{i)}\ \ \sigma = (a\ \ b\ \ c\ \ d) & \qquad\qquad \text{(4-Zyklus)} \\ \text{oder} & \text{ii)}\ \ \sigma = (a\ \ b) \circ (c\ \ d) & \qquad\qquad \text{(zwei 2-Zyklen).} \end{array}$$

Anzahl der σ in i):

$$\binom{5}{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \ = \ 30,$$

denn: Es gibt $\binom{5}{4}$ Möglichkeiten, 4 Zahlen aus M für den 4-Zyklus $(a\ \ b\ \ c\ \ d)$ auszuwählen. Nun kann jeder 4-Zyklus bei fest gewählten a, b, c, d in der Form $(a\ \ ?\ \ ?\ \ ?)$ geschrieben werden, also gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene 4-Zyklen bei gegebener Trägermenge $\{a, b, c, d\}$.

Anzahl der σ in ii):

$$\binom{5}{2} \cdot 1 \ \cdot \ \binom{3}{2} \cdot 1 \ \cdot \frac{1}{2} = \ 15,$$

denn: Es gibt $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten, 2 Zahlen aus M für den ersten 2-Zyklus $(a\ \ \ b)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden. Danach gibt es $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten, 2 weitere Zahlen aus M für den zweiten 2-Zyklus $(d\ \ e)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden. Der Faktor $\frac{1}{2}$ erklärt sich dadurch, dass durch dieses Auswahlverfahren jedes σ doppelt gezählt wurde, da ja $(a\ \ b) \circ (c\ \ d) = (c\ \ d) \circ (a\ \ b)$ ist (z.B.: im ersten Schritt wählt man 1 und 2 aus, im zweiten Schritt 3 und 4, und bildet daraus $(1\ \ 2) \circ (3\ \ 4)$; wählt man nun im ersten Schritt 3 und 4 aus, im zweiten Schritt 1 und 2, so erhält man die Permutation $(3\ \ 4) \circ (1\ \ 2)$, die identisch mit der vorherigen ist, aber nochmal neu gezählt worden ist.)

Also gibt es insgesamt $30 + 15 = 45$ Permutationen $\sigma \in S_5$ mit genau $k = 1$ Fixpunkten.

- $k = 2$: Ein $\sigma \in S_5$ mit $k = 2$ Fixpunkten „bewegt" 5-2 $= 3$ Zahlen $i \in M$, ist also von der Form

$$\sigma = (a\ \ b\ \ c) \qquad\qquad\qquad \text{(3-Zyklus)}$$

Anzahl dieser σ:

$$\binom{5}{3} \cdot 2 \cdot 1 \ = \ 20,$$

denn: Es gibt $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten, 3 Zahlen aus M für den 3-Zyklus $(a\ \ b\ \ c)$ auszuwählen. Nun kann jeder 3-Zyklus bei fest gewählten a, b, c in der Form $(a\ \ \ ?\ \ \ ?)$ geschrieben werden, also gibt es $2 \cdot 1$ verschiedene 3-Zyklen bei gegebener Trägermenge $\{a, b, c\}$.

Also gibt es 20 Permutationen $\sigma \in S_5$ mit genau $k = 2$ Fixpunkten.

- $k = 3$: Ein $\sigma \in S_5$ mit $k = 3$ Fixpunkten „bewegt" 5-3 $= 2$ Zahlen $i \in M$, ist also von der Form

$$\sigma = (a\ \ b) \qquad\qquad\qquad \text{(2-Zyklus)}$$

Anzahl dieser σ:

$$\binom{5}{2} \cdot 1 \ = \ 10,$$

denn: Es gibt $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten, 2 Zahlen aus M für den 2-Zyklus $(a \quad b)$ auszuwählen, und nur 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden.

Also gibt es 10 Permutationen $\sigma \in S_5$ mit genau $k = 3$ Fixpunkten.

- $k = 4$: Ein $\sigma \in S_5$ mit $k = 4$ Fixpunkten gibt es nicht, denn wenn 4 Zahlen $a, b, c, d \in M$ festbleiben sollen, gilt automatisch für die übriggebliebene Zahl d ebenfalls $\sigma(d) = d$, und damit hätte σ nicht 4 sondern 5 Fixpunkte.

  Also gibt es 0 Permutationen $\sigma \in S_5$ mit genau $k = 4$ Fixpunkten.

- $k = 5$: Ein $\sigma \in S_5$ mit $k = 5$ Fixpunkten „bewegt" 5-5 = 0 Zahlen, ist also die Identität.

  Also gibt es 1 Permutation $\sigma \in S_5$ mit genau $k = 5$ Fixpunkten.

Zur Kontrolle berechnen wir die Summe aller Ergebnisse – da jede Permutation in S_5 zwischen 0 und 5 Fixpunkten hat, müssen wir insgesamt alle Permutationen in S_5 erwischt haben. Und tatsächlich ist $44 + 45 + 20 + 10 + 0 + 1 = 120$, und da S_5 genau $5! = 120$ Elemente hat, sind uns keine Permutationen durch die Lappen gegangen.

Aufgabe 4.

a) Es ist

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Insbesondere sieht man, daß $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$ ist.) Außerdem ergibt sich

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\sigma^1 &= \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \\
\sigma^2 &= \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \\
\sigma^3 &= \sigma^2 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\
\sigma^4 &= \sigma^3 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{id}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich weiter $\sigma^5 = \sigma^4 \circ \sigma = \mathrm{id} \circ \sigma = \sigma$, entsprechend $\sigma^6 = \sigma^2$ usw., und die allgemeinen Formeln lautet: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned}
\sigma^{4k} &= (\sigma^4)^k = \mathrm{id}^k = \mathrm{id}, \\
\sigma^{4k+1} &= \sigma^{4k} \circ \sigma = \mathrm{id} \circ \sigma = \sigma, \\
\sigma^{4k+2} &= \sigma^{4k} \circ \sigma^2 = \mathrm{id} \circ \sigma^2 = \sigma^2, \\
\sigma^{4k+3} &= \sigma^{4k} \circ \sigma^3 = \mathrm{id} \circ \sigma^3 = \sigma^3.
\end{aligned}$$

Für die Potenzen von τ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tau^1 &= \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\
\tau^2 &= \tau \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \\
\tau^3 &= \tau^2 \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{id}\,.
\end{aligned}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ heißt das

$$\begin{aligned}
\tau^{3k} &= (\tau^3)^k = \mathrm{id}^k = \mathrm{id}, \\
\tau^{3k+1} &= \tau^{3k} \circ \tau = \mathrm{id} \circ \tau = \tau, \\
\tau^{3k+2} &= \tau^{3k} \circ \tau^2 = \mathrm{id} \circ \tau^2 = \tau^2.
\end{aligned}$$