Grundlagen der Mathematik I
Lösungsvorschlag zum 11. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1.

a) Es ist

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1,\\
a_2 &= \frac{a_1}{a_1+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3},\\
a_3 &= \frac{a_2}{a_2+2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+2} = \frac{1}{7},\\
a_4 &= \frac{a_3}{a_3+2} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}+2} = \frac{1}{15},\\
a_5 &= \frac{a_4}{a_4+2} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}+2} = \frac{1}{31}.
\end{aligned}$$

Es fällt auf, dass die errechneten Werte immer Brüche mit Zähler 1 sind, und der Nenner ist immer um 1 kleiner als eine Zweierpotenz – genauer kann man vermuten, dass $a_n = \frac{1}{2^n-1}$ gilt, denn für $n = 1, \ldots, 5$ stimmt diese Formel. (Wer dieses Bildungsgesetz nicht erkannt hat, sollte einfach weitere Werte berechnen, bis sich ein Muster abzeichnet.)

b) Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass tatsächlich $a_n = \frac{1}{2^n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist $a_1 = 1 = \frac{1}{2^1-1}$ stimmt!
Induktionsschluss $n \to n+1$. Es sei $n \geq 1$, und es gelte $a_n = \frac{1}{2^n-1}$ (**Induktionsvoraussetzung**); zu zeigen ist, dass $a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}-1}$ gilt. Aber nach der Rekursionsformel für die Folge ist

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\overset{\text{Rek.Formel}}{=} \frac{a_n}{a_n+2}\\
&\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n-1}+2} = \frac{1}{1+2\cdot(2^n-1)} = \frac{1}{1+2\cdot 2^n-2} = \frac{1}{2^{n+1}-1},
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 2. Es ist linkerseits

$$k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!}$$

sowie rechterseits

$$n\binom{n-1}{k-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!},$$

also haben tatsächlich beide Seiten den gleichen Wert.

Damit gilt nun

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= n\,x\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)} \quad \text{(Indexverschiebung...)} \\
&= n\,x\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k}(1-x)^{(n-1)-k} \quad \text{(Binomische Formel...)} \\
&= n\,x\cdot(x+(1-x))^{n-1} \\
&= n\,x\cdot 1^{n-1} \\
&= n\,x.
\end{aligned}
$$

Diese Formel ist in der Stochastik von Bedeutung: Nehmen wir an, ein Elfmeterschütze erzielt mit einer Wahrscheinlichkeit von $x \in [0,1]$ tatsächlich ein Tor. Wieviele Tore sind zu erwarten, wenn er n Versuche hat? Formal gesagt: Was ist der Erwartungswert der Zufallsvariable $X =$ Anzahl der erzielten Treffer in n Versuchen?

In der Schule zeigt man (Stichwort „Binomialverteilung“), dass die Wahrscheinlichkeit für „genau k Treffer“

$$P(X=k) = \binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k}$$

ist. Der Erwartungswert von X ist dann

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k} = nx.$$

In n Versuchen erwartet man also nx Treffer, was auch anschaulich überzeugt.

Aufgabe 3. Wir beweisen jede dieser Formeln durch vollständige Induktion nach n.

a) **Induktionsanfang.** Für $n = 1$ ist $\sum_{k=1}^{1} x_k = x_1 = 1$,
und ebenfalls ist $x_{1+2} - 1 = x_3 - 1 = 2 - 1 = 1$.
Induktionsschluss $n \to n+1$. Es sei $n \geq 1$, und es gelte $\sum_{k=1}^{n} x_k = x_{n+2} - 1$ (**Induktionsvoraussetzung**). Zu zeigen ist $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = x_{n+3} - 1$.
Es ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} x_k &= x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} x_{n+1} + x_{n+2} - 1 \\
&\overset{\text{Rek.Formel}}{=} x_{n+3} - 1,
\end{aligned}
$$

was zu zeigen war.

b) **Induktionsanfang.** Für $n = 1$ ist $\sum_{k=1}^{1} x_{2k} = x_2 = 1$,
und ebenfalls ist $x_{2\cdot 1+1} - 1 = x_3 - 1 = 2 - 1 = 1$.
Induktionsschluss $n \to n+1$. Es sei $n \geq 1$, und es gelte $\sum_{k=1}^{n} x_{2k} = x_{2n+1} - 1$ (**Induktionsvoraussetzung**). Zu zeigen ist $\sum_{k=1}^{n+1} x_{2k} = x_{2(n+1)+1} - 1$.

Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} x_{2k} &= x_{2n+2} + \sum_{k=1}^{n} x_{2k} \\ &\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} x_{2n+2} + x_{2n+1} - 1 \\ &\overset{\text{Rek.Formel}}{=} x_{2n+3} - 1 \\ &= x_{2(n+1)+1} - 1,\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

c) **Induktionsanfang.** Für $n = 1$ ist $\sum_{k=1}^{1} x_{2k-1} = x_1 = 1$,
und ebenfalls ist $x_{2\cdot 1} = x_2 = 1$.
Induktionsschluss $n \to n+1$. Es sei $n \geq 1$, und es gelte $\sum_{k=1}^{n} x_{2k-1} = x_{2n}$ (**Induktionsvoraussetzung**). Zu zeigen ist $\sum_{k=1}^{n+1} x_{2k-1} = x_{2(n+1)}$.
Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} x_{2k-1} &= x_{2(n+1)-1} + \sum_{k=1}^{n} x_{2k-1} \\ &\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} x_{2n+1} + x_{2n} \\ &\overset{\text{Rek.Formel}}{=} x_{2n+2} \\ &= x_{2(n+1)},\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 4. Es muss für jedes $n \geq 2$ gelten

$$a^{n+1} = a^n + a^{n-1},$$

oder äquivalent (durch Ausklammern von a^{n-1})

$$a^{n-1} \cdot a^2 = a^{n-1} \cdot (a+1). \tag{1}$$

Dies ist sicher dann stets erfüllt, wenn $a = 0$ ist; damit ist $a_0 := 0$ eine mögliche Lösung. Für $a \neq 0$ ist die Gleichung (1) äquivalent zu $a^2 = a + 1$ (man beachte das Verschwinden der Variable n!), so dass die Lösungen dieser quadratischen Gleichung genau die möglichen Werte von a sind.
Die Lösungen der Gleichung $a^2 = a + 1$, äquivalent $a^2 - a - 1 = 0$, sind aber nach der Quadratischen Lösungsformel

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Es gibt also genau drei solche Zahlen, nämlich $a_0 = 0$, a_1 und a_2.