Mathematisches Institut der Universität München | Prof. Dr. D. Rost
Wintersemester 2017/18 | M. Jeblick, S. Aristarhov
Grundlagen der Mathematik I

Lösung des 10. Tutoriumsblatts

Aufgabe 1.

a) Die Aussage ist **wahr**: Gilt nämlich $b \mid a_1$, also $a_1 = b \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, und $b \mid a_1 + a_2$, also $a_1 + a_2 = b \cdot \ell$ für ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ (wobei natürlich $\ell \geq k$ sein muss), so folgt

$$a_2 = (a_1 + a_2) - a_1 = b \cdot \ell - b \cdot k = b \cdot (\ell - k),$$

also $b \mid a_2$. Man sollte noch bemerken, dass $\ell - k$ in $\mathbb{N}_0$ ist, da $\ell \geq k$ gilt.

b) Die Aussage ist ebenfalls **wahr**: Gilt nämlich etwa $b \mid a_1$, also $a_1 = b \cdot k_1$ für ein $k_1 \in \mathbb{N}_0$, so folgt $a_1 \cdot a_2 = (b \cdot k_1) \cdot a_2 = b \cdot (k_1 \cdot a_2)$, also $b \mid a_1 \cdot a_2$. Der Fall, dass stattdessen $b \mid a_2$ gilt, wird entweder genauso behandelt, oder man bemerkt, dass er sich aus dem schon bewiesenen Fall ergibt durch Vertauschen von a_1 und a_2. (Vgl. dazu den Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt, Aufgabe 3 b).)

c) Die Aussage ist **falsch**: Beispielsweise für $b = 12$, $a_1 = 3$ und $a_2 = 8$ gilt zwar $b \mid a_1 \cdot a_2$ (denn $12 \mid 24$), jedoch weder $b \mid a_1$ noch $b \mid a_2$ (denn $12 \nmid 3$ und $12 \nmid 8$).

Aufgabe 2. Wir beweisen alle diese Aussagen durch Induktion nach n.

a) **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ ist ist $4n^3 - n = 0$ und $3 \mid 0$.

Induktionsschluß $n \to n + 1$. Es sei $n \geq 0$, und es gelte $3 \mid (4n^3 - n)$ (**Induktionsvoraussetzung**). Zu zeigen ist, dass $3 \mid (4(n + 1)^3 - (n + 1))$.

Es ist

$$\begin{aligned} 4(n+1)^3 - (n+1) &= 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n + 1) \\ &= 4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3 \\ &= (4n^3 - n) + 3 \cdot (4n^2 + 4n + 1) \end{aligned}$$

Nun gilt $3 \mid 3 \cdot (4n^2 + 4n + 1)$ und nach Induktionsvoraussetzung $3 \mid (4n^3 - n)$, also $3 \mid [(4n^3 - n) + 3 \cdot (4n^2 + 4n + 1)]$, und damit $3 \mid (4(n + 1)^3 - (n + 1))$, was zu zeigen war.

b) **Induktionsanfang.** Für $n = 0$ ist ist $5^n + 7 = 1 + 7 = 8$ und $4 \mid 8$.

Induktionsschluß $n \to n + 1$. Es sei $n \geq 0$, und es gelte $4 \mid (5^n + 7)$ (**Induktionsvoraussetzung**); zu zeigen ist, dass $4 \mid (5^{n+1} + 7)$. Es ist

$$\begin{aligned} 5^{n+1} + 7 &= 5 \cdot 5^n + 7 \\ &= 4 \cdot 5^n + 5^n + 7. \end{aligned}$$

Nun gilt $4 \mid 4 \cdot 5^n$ und nach Induktionsvoraussetzung $4 \mid (5^n + 7)$, also $4 \mid [4 \cdot 5^n + 5^n + 7]$, und damit $4 \mid (5^{n+1} + 7)$, was zu zeigen war.

c) Sei $a \in \mathbb{N}_0$ fest gewählt. Wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $6 \mid (a^{2n+1} - a)$ durch vollständige Induktion (nach n).

Induktionsanfang. Für $n = 0$ ist $a^{2n+1} - a = a - a = 0$ und $6 \mid 0$.

Induktionsschluß $n \to n+1$. Es sei $n \geq 0$, und es gelte $6 \mid (a^{2n+1} - a)$ (**Induktionsvoraussetzung**); zu zeigen ist, dass $6 \mid (a^{2(n+1)+1} - a)$.

Es ist

$$\begin{aligned} a^{2(n+1)+1} - a &= a^{2n+3} - a \\ &= a^2 \cdot a^{2n+1} - a \\ &= a^2 \cdot (a^{2n+1} - a + a) - a \\ &= a^2 \cdot (a^{2n+1} - a) + a^3 - a \\ &= a^2 \cdot (a^{2n+1} - a) + (a^3 - a). \end{aligned}$$

Nun ist nach Induktionsvoraussetzung $6 \mid (a^{2n+1} - a))$, und nach 5.10 der Vorlesung gilt auch $6 \mid (a^3 - a)$, also ist nach 5.8f) auch $6 \mid [a^2 \cdot (a^{2n+1} - a) + (a^3 - a)]$, also gilt $6 \mid (a^{2(n+1)+1} - a)$, was zu zeigen war.

Aufgabe 3.

a) Es ist

$$a = (731)_9 = \mathbf{7} \cdot 9^2 + \mathbf{3} \cdot 9^1 + \mathbf{1} \cdot 9^0 = 7 \cdot 81 + 3 \cdot 9 + 1 = 595$$

(dieses Resultat kann man natürlich auch als $(595)_{10}$ schreiben). Zur Darstellung von $a = 595$ im 4-adischen Zahlensystem bestimmen wir zunächst die größte Potenz von 4, die nicht größer ist als die Zahl a: Wegen

$$\begin{aligned} 4^0 &= 1, \\ 4^1 &= 4, \\ 4^2 &= 16, \\ 4^3 &= 64, \\ 4^4 &= 256, \\ 4^5 &= 1024 > a \end{aligned}$$

ist dies $4^4 = 256$, wir werden also fünf Ziffern (für die Stellen mit Wert 4^0, 4^1, 4^2, 4^3 und 4^4) benötigen. Nun dividieren wir, unter Verwendung unserer Liste der Potenzen von $b = 4$, wiederholt mit Rest:

$$\begin{aligned} 595 &= \mathbf{2} \cdot 4^4 + 83 \\ &= \mathbf{2} \cdot 4^4 + \mathbf{1} \cdot 4^3 + 19 \\ &= \mathbf{2} \cdot 4^4 + \mathbf{1} \cdot 4^3 + \mathbf{1} \cdot 4^2 + 3 \\ &= \mathbf{2} \cdot 4^4 + \mathbf{1} \cdot 4^3 + \mathbf{1} \cdot 4^2 + \mathbf{0} \cdot 4^1 + 3 \\ &= \mathbf{2} \cdot 4^4 + \mathbf{1} \cdot 4^3 + \mathbf{1} \cdot 4^2 + \mathbf{0} \cdot 4^1 + \mathbf{3} \cdot 4^0, \end{aligned}$$

also $a = 595 = (21103)_4$.

b) Es ist

$$\begin{aligned} a &= (10010101)_2 \\ &= \mathbf{1} \cdot 2^7 + \mathbf{0} \cdot 2^6 + \mathbf{0} \cdot 2^5 + \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{0} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 \\ &= 128 + 16 + 4 + 1 \\ &= 149 \quad (= (149)_{10}) \end{aligned}$$

[0] Ein direkter Beweis dieser Aussage lässt sich, zumindest wenn man die Eigenschaften der Primfaktorzerlegung kennt, folgendermaßen führen: Es ist $a^3 - a = a \cdot (a^2 - 1) = (a-1) \cdot a \cdot (a+1)$ ein Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Von diesen ist aber stets mindestens eine durch 3 teilbar und mindestens eine gerade; ihr Produkt enthält also die Primfaktoren 2 und 3 und ist damit durch 6 teilbar.

Zur Darstellung von $a = 149$ im 9-adischen Zahlensystem bestimmen wir zunächst die Potenzen von 9, bis wieder die Zahl a überschritten haben:

$$\begin{aligned} 9^0 &= 1, \\ 9^1 &= 9, \\ 9^2 &= 81, \\ 9^3 &= 729 > a. \end{aligned}$$

Nun dividieren wir, unter Verwendung unserer Liste der Potenzen von $b = 4$, wiederholt mit Rest:

$$\begin{aligned} 149 &= \mathbf{1} \cdot 9^2 + 68 \\ &= \mathbf{1} \cdot 9^2 + \mathbf{7} \cdot 9^1 + 5 \\ &= \mathbf{1} \cdot 9^2 + \mathbf{7} \cdot 9^1 + \mathbf{5} \cdot 9^0 \\ &= (175)_9. \end{aligned}$$

c) Es ist

$$a = (17)_{20} = \mathbf{1} \cdot 20^1 + \mathbf{7} \cdot 20^0 = 20 + 7 = 27 \quad (= (27)_{10})$$

und wegen $16^0 = 1$, $16^1 = 16$, $16^2 = 256 > a$ können wir nun rechnen:

$$\begin{aligned} 27 &= \mathbf{1} \cdot 16^1 + 11 \\ &= \mathbf{1} \cdot 16^1 + \mathbf{11} \cdot 16^0 \\ &= (1B)_{16}, \end{aligned}$$

da ja vereinbarungsgemäß im Sechzehnersystem (Hexadezimalsystem) die „Ziffern“ mit den Werten $10, 11, \ldots, 15$ durch die Buchstaben $A, B, \ldots, F$ bezeichnet werden.

Aufgabe 4. Wir beweisen die Aussage, dass es bei n mit Einbahnstraßen verbundenen Städten immer mindestens eine gibt, von der aus man alle anderen erreichen kann, per Induktion über n. Da der Fall $n = 1$ trivial ist (dann gibt es keine Straßen), betrachten wir als **Induktionsanfang** den Fall $n = 2$: Die Städte S_1 und S_2 sind mit einer Straße verbunden, die in eine Richtung befahrbar ist. Also kann man von einer der beiden Städte in die andere gelangen, was die Behauptung im Fall $n = 2$ beweist.
Nun zum **Induktionsschluss** von $n \to n + 1$: Sei $n \geq 2$ und gelte, dass bei n Städten immer mindestens eine existiert, von der aus man alle anderen erreichen kann (Induktionsvoraussetzung). Dann ist zu zeigen, das dasselbe bei $n + 1$ Städten wahr bleibt.
Nehmen wir von unseren Städten $S_1, ..., S_{n+1}$ die ersten n heraus, so wissen wir, dass es unter diesen Städten $S_1, ..., S_n$ eine gibt, von der aus man alle anderen erreichen kann. (Das ist ja die Induktionsvoraussetzung.) Nennen wir sie S_l. Wir wissen also:

Von S_l aus kann man alle Städte $S_1, ..., S_n$ erreichen.

Nun gibt es nach Aufgabenstellung eine Straße zwischen S_l und S_{n+1}. Es gibt hier zwei Möglichkeiten zu betrachten:

- Die Straße ist in der Richtung $S_l \to S_{n+1}$ befahrbar. Dann kann man also von S_l aus alle Städte $S_1, ..., S_{n+1}$ erreichen und wir sind fertig mit dem Induktionsschluss.

- Die Straße ist in der Richtung $S_{n+1} \to S_l$ befahrbar. Dann kann man also von S_{n+1} nach S_l fahren und von dort aus weiter in alle Städte $S_1, ...S_n$. Somit kann man von S_{n+1} aus alle Städte $S_1, ..., S_{n+1}$ erreichen und wir sind fertig mit dem Induktionsschluss.