Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2017/18
Grundlagen der Mathematik I

Prof. Dr. D. Rost
M. Jeblick, S. Aristarhov

10. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Rechenregeln zur Teilbarkeit). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ gilt: $(b \mid a_1 \ \wedge\ b \mid (a_1 + a_2)) \implies b \mid a_2$.

b) Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ gilt: $(b \mid a_1 \ \vee\ b \mid a_2) \implies b \mid (a_1 \cdot a_2)$.

c) Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ gilt: $b \mid (a_1 \cdot a_2) \implies (b \mid a_1 \ \vee\ b \mid a_2)$.

Aufgabe 2 (Teilbarkeit). Man beweise die folgenden Teilbarkeitsaussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

a) $3 \mid (4n^3 - n)$.

b) $4 \mid (5^n + 7)$.

c) $6 \mid (a^{2n+1} - a)$ für alle $a \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3 (b-adische Darstellungen). Man berechne die folgenden in Stellenwertsystemen gegebenen Zahlen im Dezimalsystem und gebe anschließend ihre b-adische Darstellung an:

a) $a = (731)_9$ und $b = 4$.

b) $a = (10010101)_2$ und $b = 9$.

c) $a = (17)_{20}$ und $b = 16$.

Aufgabe 4 (Vollständige Induktion). In einer Gemeinde in Niederbayern gibt es n Städte $S_1, ..., S_n$, die jeweils durch eine Straße verbunden sind. (Es gibt also zwischen jedem beliebigen Paar von Städten genau eine Verbindungsstraße.)
Wegen Bauarbeiten sind aber derzeit alle Straßen Einbahnstraßen. Beweisen Sie:
Es gibt dann dennoch immer noch eine Stadt, von der aus man in alle anderen Städte gelangen kann. (Dabei darf man natürlich auch andere Wege als den direkten Weg nehmen, solange man nicht falsch herum durch eine Einbahnstraße fährt!)
Hinweis: Führen Sie eine vollständige Induktion durch, bei der Sie $n \geq 2$ betrachten. Am Fall von $n = 3$ oder $n = 4$ können Sie sich klarmachen, wie der Induktionsschritt funktionieren könnte.