Liebe Studenten, am Donnerstag hatten wir nicht genug Zeit um die Aufgaben 4,5,6 und die Bonusaufgabe zu besprechen. Deswegen löse ich sie hier unten.

4) Gegeben ist einen Körper K. Es seien $a, b \in K$, $0 < a < 1$ und $b > 1$, welche der folgenden Ungleichungen stimmen?

a) $\dfrac{b}{a} \geq a$ b) $a \cdot b \geq 1$ c) $a^2 \leq a$

d) $b^2 \leq b$ e) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} < \dfrac{a}{b}$ f) $\sqrt{\dfrac{b}{a}} > \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Lösung:

a) Lass uns beweisen, dass diese Ungleichung stimmt.

Schritt 1 Gegeben ist unter anderem, dass $a > 0$. Deswegen, nach der Definition der Einordnung im Körper, dürfen wir beide Seiten von der anderen gegebenen Ungleichung $a < 1$ mit a multiplizieren, womit bekommen wir $a^2 < a$. Bemerkt, dass wir damit schon bewiesen haben, dass c) stimmt. Nun haben wir $a^2 < a, a < 1, 1 < b$, deswegen $b > a^2$.

Schritt 2 Nun beweisen wir, dass $(a > 0) \implies (a^{-1} > 0)$. Durch Widerspruch: Lass uns vermuten, dass $a > 0$, aber $a^{-1} \leq 0$. Wieder nach der Def. von der Einordnung, multiplizieren wir beide Seiten von $a^{-1} \leq 0$ mit a und kriegen: $1 \leq 0$. Das ist der Widerspruch mit der richtigen Ungleichung $1 > 0$, die wir bei der vorletzten ZÜ besprochen haben. So ist das bewiesen, dass $(a > 0) \implies (a^{-1} > 0)$.

Schritt 3 Wir haben gerade bewiesen, dass $a^{-1} > 0$, deswegen dürfen wir beide Seiten von der beim 1. Schritt bewiesenen Ungleichung mit a^{-1} multiplizieren, und so bekommen wir: $ba^{-1} = \frac{b}{a} > a$. Daraus folgt $\frac{b}{a} \geq a$.

b) Das ist falsch: Im Körper gibt es immer die Elemente $a| \, 0 < a < 1$ und $b| \, b > 1$, für die $ab < 1$. Hier ist eine Variante des Beweises.

Schritt 1 Lass uns beweisen, dass $\forall x, y \in K \quad (x > y > 0) \implies (\frac{y}{x} < 1)$. Durch Widerspruch: Lass uns vermuten, dass $x > y > 0$, aber $\frac{y}{x} \geq 1$. Nach der Multiplikation der letzten Ungleichung mit $x > 0$ kriegen wir $y \geq x$. Das ist der Widerspruch mit der Vermutung. Deswegen gilt $\forall x, y \in K \quad (x > y > 0) \implies (\frac{y}{x} < 1)$.

Schritt 2 Nehmen wir ein Element $c > 0$ vom K. Nach dem Ergebnis von der Aufgabe 1 des Blattes, haben wir $b < b + c$. D.h. wir haben die Kette $0 < b < b + c$. Und, mit dem Ergebnis vom Schritt 1, erreichen wir an $b/(b + c) < 1$. Nun lass uns wählen $a = \frac{1}{b+c}$. Dann $ab = \frac{b}{b+c} < 1$.

c) Im Fall a) haben wir unterwegs bewiesen, dass $a^2 < a$, woraus $a^2 \leq a$ folgt.

d) Das stimmt nicht. Wir wissen, dass $b > 0$, deswegen ist $b^{-1} > 0$ (seht den Fall a) Schritt 2 an). Wenn wir $b^2 \leq b$ mit b^{-1} multiplizieren, kriegen wir $b \leq 1$. Das ist der Widerspruch mit der Angabe.

e) Das stimmt nicht. Beweis:

Schritt 1 Wir wissen, dass $a > 0$, $b^{-1} > 0$ und dass die Wurzel von einem positiven Element des Körpers auch grösser als 0 ist, deswegen $\frac{a}{b} > 0$ und $\sqrt{\frac{a}{b}} > 0$.

Schritt 2 Lass uns die Ungleichung $\sqrt{\frac{a}{b}} < \frac{a}{b}$ zuerst mit dem Element $\sqrt{\frac{a}{b}}$ multiplizieren: $\frac{a}{b} < \frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}$. Nun – mit $\frac{a}{b}$: $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}} < (\frac{a}{b})^2$. Aufgrund der Transitivität: $\frac{a}{b} < (\frac{a}{b})^2$. Aber wir haben $0 < a < b$, deswegen, aufgrund des 1. Schrittes des Falls b), haben wir $\frac{a}{b} < 1$. Und, aufgrund der Ungleichung im c), die, als wir bewiesen haben, für beliebiges Element kleiner als 1 gilt, muss sein: $(\frac{a}{b})^2 \leq \frac{a}{b}$. Wir haben am Widerspruch erreicht.

f) Das stimmt. Beweis:

Schritt 1 Lass uns beweisen: $\forall x, y \in K \quad (0 < x < y) \implies (\sqrt{x} < \sqrt{y})$. Durch Widerspruch: Wir vermuten $0 < x < y$, aber $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$. Wir multiplizieren jetzt die letzte Ungleichung zuerst mit $\sqrt{x}$, dann mit $\sqrt{y}$ und nutzen die Transitivität, um zu erreichen an $x \geq y$ – Widerspruch mit der Vermutung.

Schritt 2 Gegeben ist, dass $1 < b$. Lass uns diese Ungleichung mit $\frac{a}{b} > 0$ multiplizieren. Wir kriegen dann $\frac{a}{b} < a$, woraus folgt, dass $\frac{a}{b} < 1$ (weil $a < 1$). Ähnlich kann man zeigen, dass $\frac{b}{a} > 1$, denn $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$. Nun reicht das das Ergebnis vom 1. Schritt anzuwenden, um zu bestätigen, dass $\sqrt{\frac{b}{a}} > \sqrt{\frac{a}{b}}$.

5) Welche der folgenden Vorschriften geben wohldefinierte Abbildungen an?

a) $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$

b) $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ g(x) = \dfrac{3}{x}$

c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{Q},\ h(x) = \dfrac{4}{x}$

d) $k : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N},\ k(1) = 2, k(2) = 3, k(3) = 5, k(4) = 2016.$

Lösung

Hier muss man einfach darauf achten, dass jedem Element der Quelle ein Element vom Ziel übereinstimmt und dass das Ziel und Zuordnungsvorschrift sich nicht widersprechen.

1. Hier ist alles OK
2. Nicht OK, weil $0 \in \mathbb{Q}$, aber es gibt kein Element im Ziel, das 0 übereinstimmt.
3. Nicht OK, weil das Ziel und die Zuordnungsvorschrift sich widersprechen. Z.B. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$, aber $h(\sqrt{2}) = 4/\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
4. Hier ist alles OK

6) Lösen Sie die Ungleichung:

$$\frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2 - 3x - 18} \leq 0$$

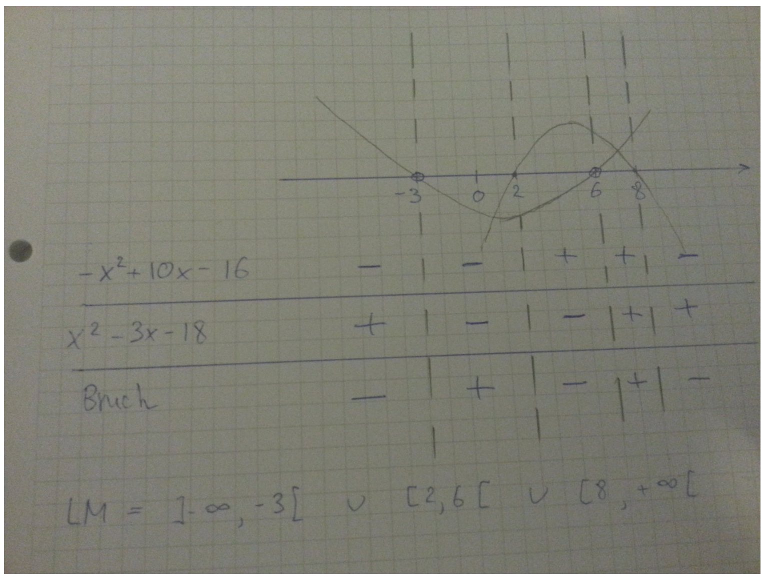
Lösung

Die Lösungsmenge ist die Menge von den reelen Zahlen, für die entweder der Zähler und der Nenner verschiedene Vorzeichen haben oder der Zähler gleich Null ist. Auserdem müssen die Punkte, für die der Nenner Null wird, ausgeschlossen werden.

Der Zähler ist eine Parabel, die wegen des Minuses vor x^2 "nach unten guckt" und die x-Achse in den Punkten 2 und 8 überschneidet, weil die Nullstellen vom $-x^2 + 10x - 16$ genau 2 und 8 sind (das kann man auch einfach mit dem Satz von Vieta herausfinden). Deswegen ist der Zähler gröser oder gleich Null, wenn $x \in [2, 8]$ und kleiner als Null ansonsten.

Analog ist der Nenner die Parabel, die "nach oben guckt" und die x-Achse in den Punkten -3 und 6 überschneidet. Deswegen ist der Nenner kleiner als Null, wenn $x \in]-3, 6[$ und ansonsten positiv. Wenn $x = -3, 6$, hat die Ungleichung keinen Sinn, diese Punkte können nicht in der Lösungsmenge liegen.

Die Lösungsmenge ist $]-\infty, -3[\cup [2, 6[\cup [8, +\infty[$. Für die Erklärung seht die Zeichnung an:



Entschuldigt, bitte, für die schlechte Qualität!

Bonusaufgabe: Wie viele Elemente hat die folgende Menge?

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} | \, |x - 2| = 5 \wedge (\frac{1}{y} = y \vee \sqrt{y + 2} \leq 0) \}$$

Lösung

A ist die Menge der Paare, solche dass für x gilt: $|x - 2| = 5$ und für y entweder $\frac{1}{y} = y$ oder $\sqrt{y + 2} \leq 0$ gelten muss. Dazu muss x eine ganze Zahl sein, und y – eine reele Zahl.

Deswegen muss x entweder 7 oder -3 sein, weil die zwei Zahlen sind die Lösungen von $|x - 2| = 5$ und beide sind ganze, und es gibt drei Varianten von y: $1, -1, -2$. ± 1 sind die Lösungen von $\frac{1}{y} = y$ und -2 ist die einzige reele Lösung von $\sqrt{y + 2} \leq 0$.

Insgesamt haben wir zwei Varianten für die erste Stelle des Paars und drei Varianten für die zweite. Das macht $2 \cdot 3 = 6$ Paare.