PEUT-ON COMPRENDRE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE ?

Jean BRICMONT

SAPHYBRU,
14 OCTOBRE 2017

PREMIER COURS : LA MÉCANIQUE QUANTIQUE POSE-T-ELLE UN PROBLÈME ?

Il n'existe pas des choses qui sont "des choses". Les objets sont fantomatiques, sans propriétés définies (telles que position ou masse) avant d'être *mesurées*. Avant cela, les propriétés sont dans une pénombre appelée "superposition".

Toutes les particules sont des ondes et les ondes des particules, qui apparaissent sous l'une ou l'autre forme, en fonction du type de *mesure* qui est faite.

Une particule qui se déplace entre deux points parcourt tous les chemins possibles simultanément.

Des particules qui se trouvent à des millions de kilomètres de distance peuvent agir l'une sur l'autre instantanément.

The Economist, 7 janvier 1989 ; *The queerness of quanta.*

Nous ne pouvons plus parler du comportement de la particule indépendamment du processus *d'observation.*

En conséquence de quoi, les lois naturelles formulées mathématiquement dans la théorie quantique ne traitent plus des particules élémentaires elles-mêmes, mais de notre *connaissance* à leur sujet.

De même, il n'est plus possible de se demander si ces particules existent objectivement dans l'espace et le temps...

W. HEISENBERG

Aucun phénomène élémentaire n'est un phénomène avant qu'il ne soit un phénomène *observé*.

J. A. WHEELER

Lors d'une mesure de la position d'un électron, celui-ci "est forcé à prendre une décision. Nous l'obligeons à prendre une position bien définie; avant cela, il n'était ni ici ni là; il n'avait pas encore pris de décision concernant sa position.

... Si, dans une autre expérience, la vitesse de l'électron est mesurée, cela signifie : l'électron est forcé à se décider à prendre une valeur définie de sa vitesse".

P. JORDAN

Vous voyez, la description de la mécanique quantique se fait en terme de *connaissance*. Et la connaissance nécessite quelqu'un qui connaît.

R. PEIERLS

Peut-être que tout cela, ce sont de vieilles histoires, éliminées ou clarifiées par le développement de la physique. Mais un physicien contemporain écrit :

La doctrine selon laquelle le monde est fait d'objets dont l'existence est indépendante de la *conscience* humaine se trouve être en conflit avec la mécanique quantique et avec des faits établis expérimentalement.

B. D'ESPAGNAT

Ainsi que :

On peut démontrer que la lune n'est pas là quand personne ne la *regarde*.

D. MERMIN

Et on lit dans *Nature* en 2005 :

Quel est le message du quantum ? ... Je suggère que la distinction entre la réalité et notre *connaissance* de la réalité, entre réalité et *information*, ne peut pas être faite.

A. ZEILINGER

Mais tout le monde n'est pas d'accord:

On peut être capable d'avoir une attitude réaliste par rapport au monde, de parler du monde comme s'il était réellement là, même si on ne l'observe pas. Je crois certainement en un monde qui était là avant moi, et qui sera là après moi et je crois que vous en faites partie ! Et je crois que la plupart des physiciens prennent ce point de vue quand ils sont coincés par des philosophes.

J.S. BELL

La philosophie tranquillisante de Heisenberg et Bohr – ou est-ce une religion ? – est si habilement échafaudée qu'elle permet aux vrais croyants de se reposer sur un oreiller si doux qu'il n'est pas facile de les réveiller.

A. EINSTEIN à E. SCHRÖDINGER
(lettre)

Tu sais que je t'aime bien et rien ne peut changer cela. Mais je dois te passer un savon. Aussi, ne bouge pas. L'impudence avec laquelle tu affirmes de façon répétée que l'interprétation de Copenhague est pratiquement universellement acceptée, que tu l'affirmes sans hésitation, même devant un public de non-experts, qui est complètement à ta merci, est à la limite de l'acceptable. ... N'as tu aucune inquiétude concernant le verdict de l'histoire ? Es-tu tellement convaincu que l'humanité entière va succomber sous peu à votre folie ?

E. SCHRÖDINGER à M. BORN (lettre)

Premier mystère : la superposition

SPIN

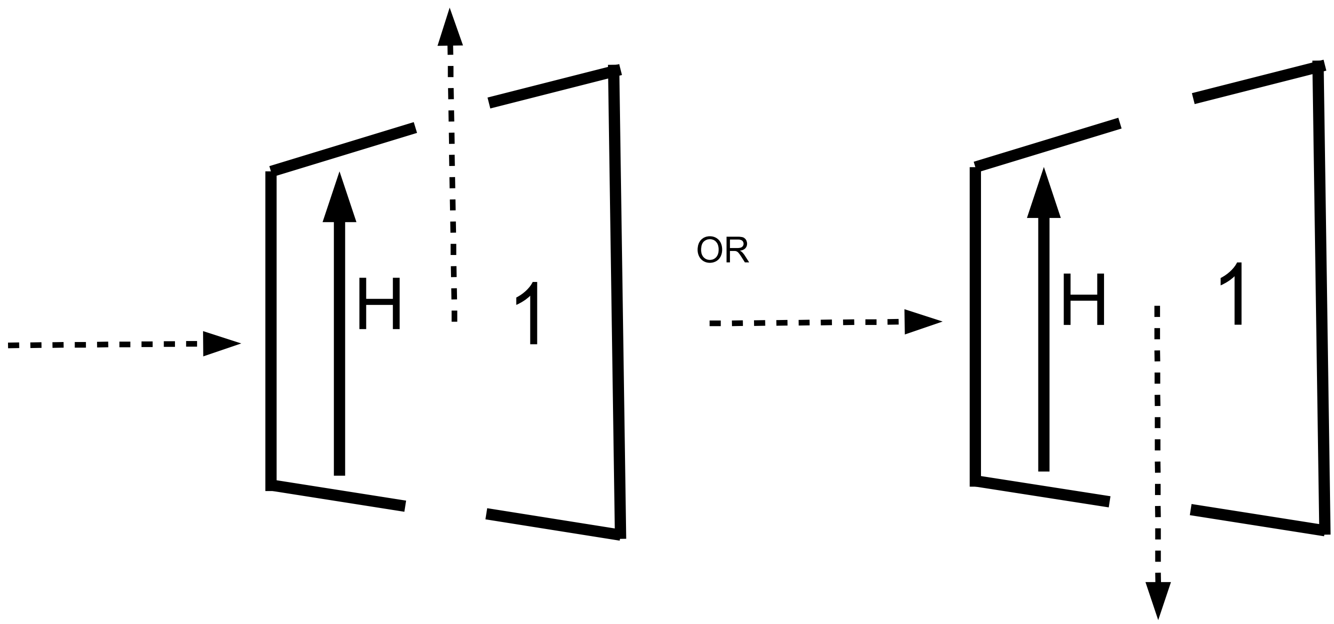
Propriétés : prend deux valeurs

up et down $\uparrow$ et $\downarrow$

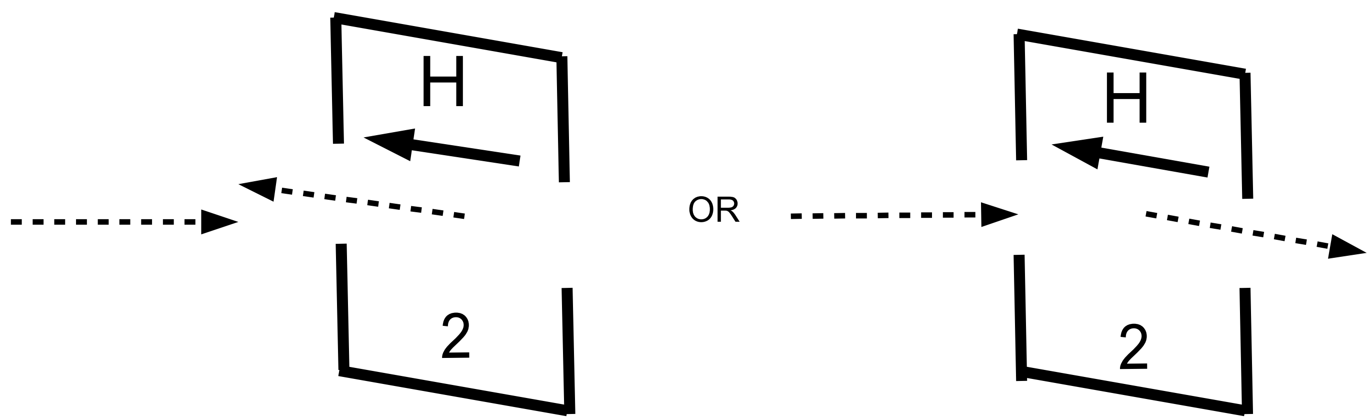
deux directions 1 et 2

$1\uparrow$ $1\downarrow$ $2\uparrow$ $2\downarrow$

Appareils “mesurant” le spin dans les directions 1 ou 2.

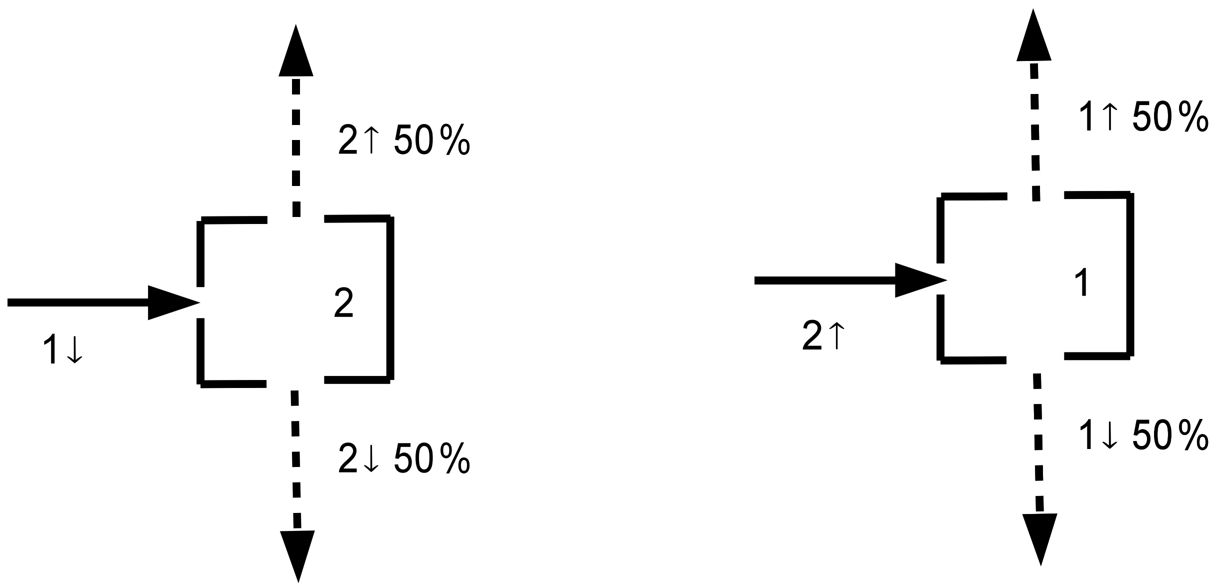


Une particle est envoyée vers une boîte perpendiculaire au plan de l'image dans laquelle se trouve un champ magnétique orienté vers le haut selon l'axe vertical noté 1. La particule va soit vers le haut, comme dans la partie gauche de la figure, c'est-à-dire dans la direction du champ, soit vers le bas, comme dans la partie droite de la figure, c'est-à-dire dans la direction opposée à celle du champ.



Une particle est envoyée vers une boîte perpendiculaire au plan de l'image dans laquelle se trouve un champ magnétique orienté selon l'axe horizontal noté 2. La particule va soit vers la gauche, comme dans la partie gauche de la figure, c'est-à-dire dans la direction du champ soit vers la droite comme dans la partie droite de la figure, c'est-à-dire dans la direction opposée à celle du champ.

REPRÉSENTATION ABSTRAITE:



$1\downarrow \quad \longrightarrow \quad$ on mesure le spin dans la direction 2

$\longrightarrow \quad$ moitié $\uparrow$, moitié $\downarrow$

$1\downarrow \quad \longrightarrow \quad$ idem

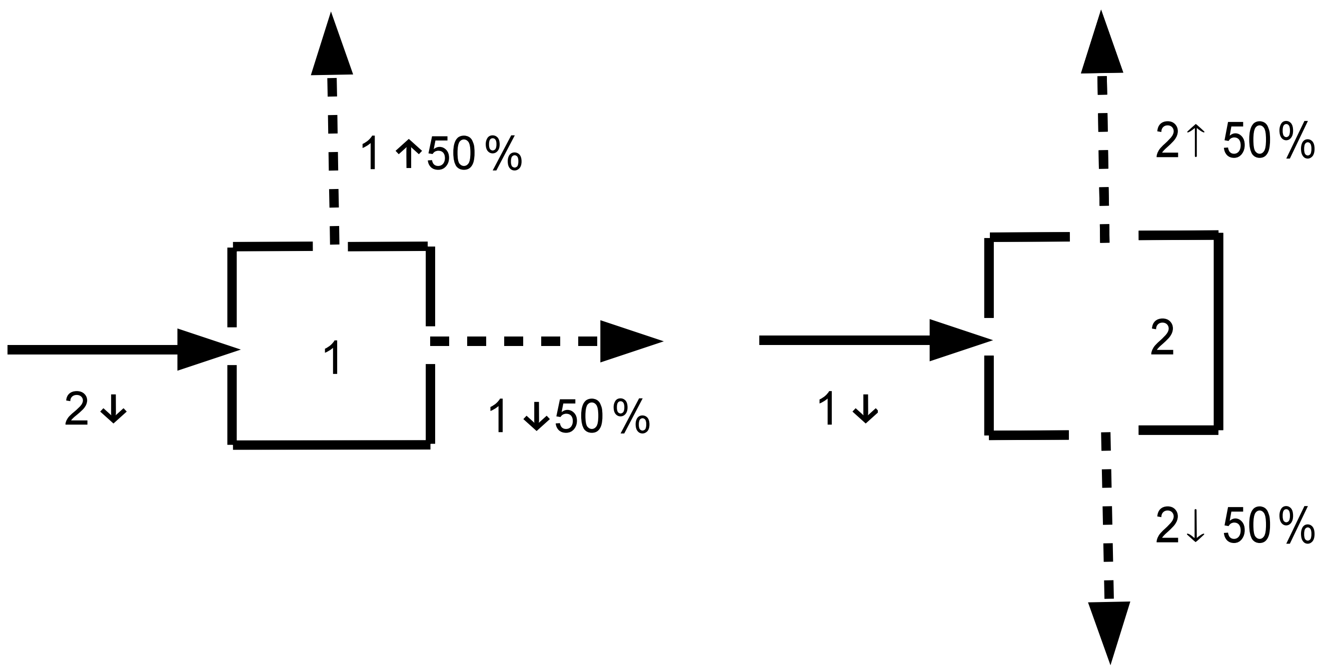
$2\uparrow \quad \longrightarrow \quad$ on mesure le spin dans la direction 1

$\longrightarrow \quad$ moitié $\uparrow$, moitié $\downarrow$

$2\downarrow \quad \longrightarrow \quad$ idem

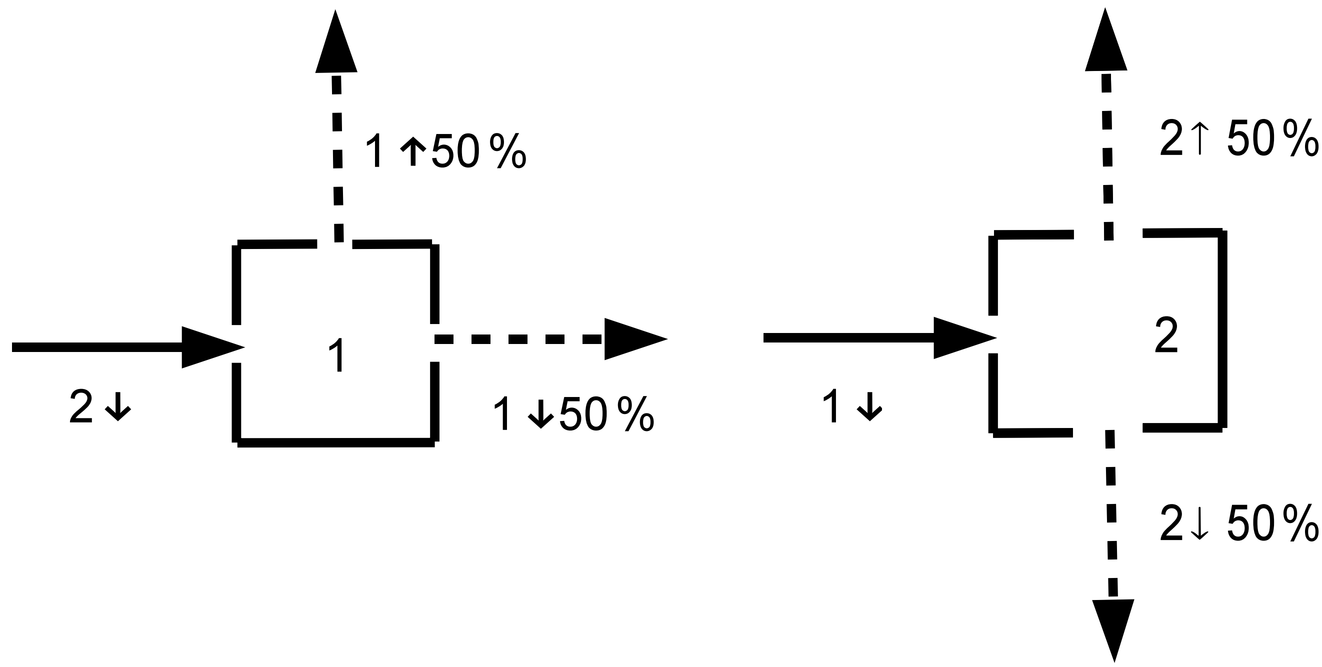
On prend des particules avec le spin down dans la direction 2 et on les mesure dans la direction 1.

On prend celles qui sont down dans la direction 1;



Sont-elles à la fois down dans la direction 2 et down dans la direction 1?

Mesurons les dans la direction 2:



On obtient

$$1\downarrow \quad\longrightarrow\quad 50\ \%\ 2\uparrow \quad 50\ \%\ 2\downarrow$$

On a le même résultat pour les quatre combinaisons,

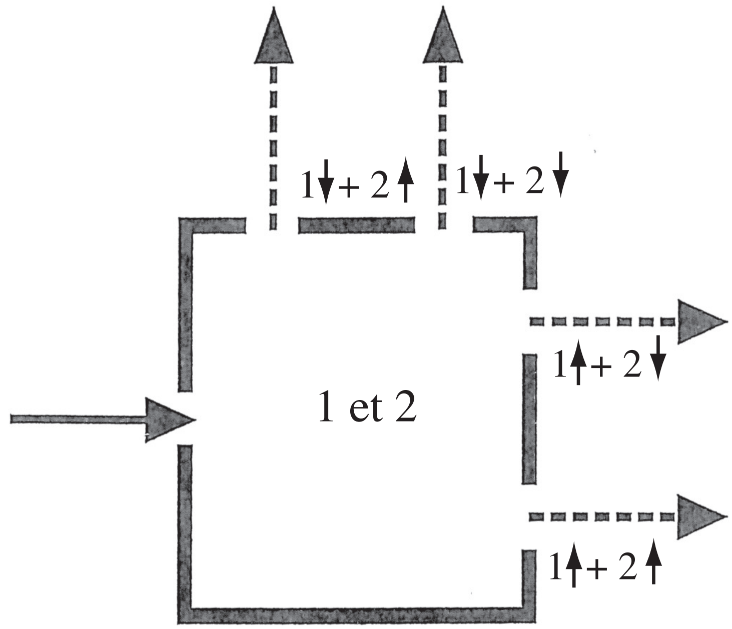
1 up, 2 up,

1 up, 2 down,

1 down, 2 up,

1 down, 2 down.

Si l'on sélectionne des particules qui sont initialement up ou down dans une direction (1 ou 2) et qu'on les mesure dans l'autre direction, elles ont "oublié" la valeur du spin qui était déterminée dans la direction initiale.

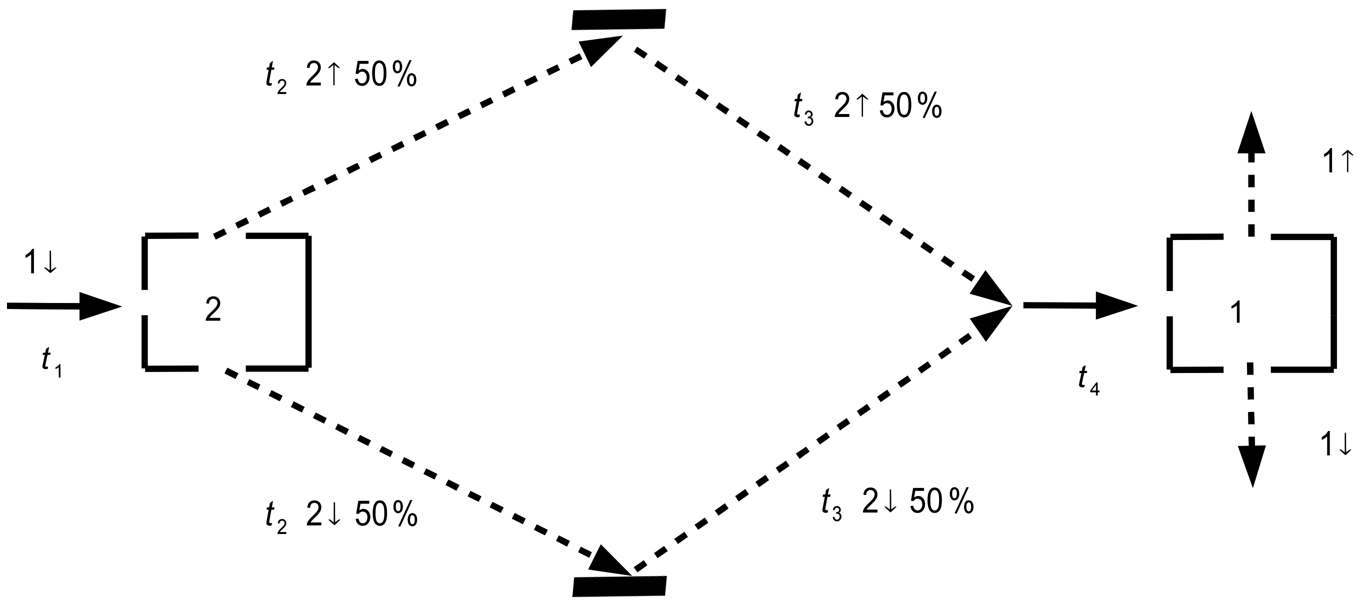


La boîte ci-dessus est impossible à construire.

Deux boîtes successives, qui mesurent le spin dans la direction 1 puis 2 rendent le spin dans la direction 1 indéterminé.

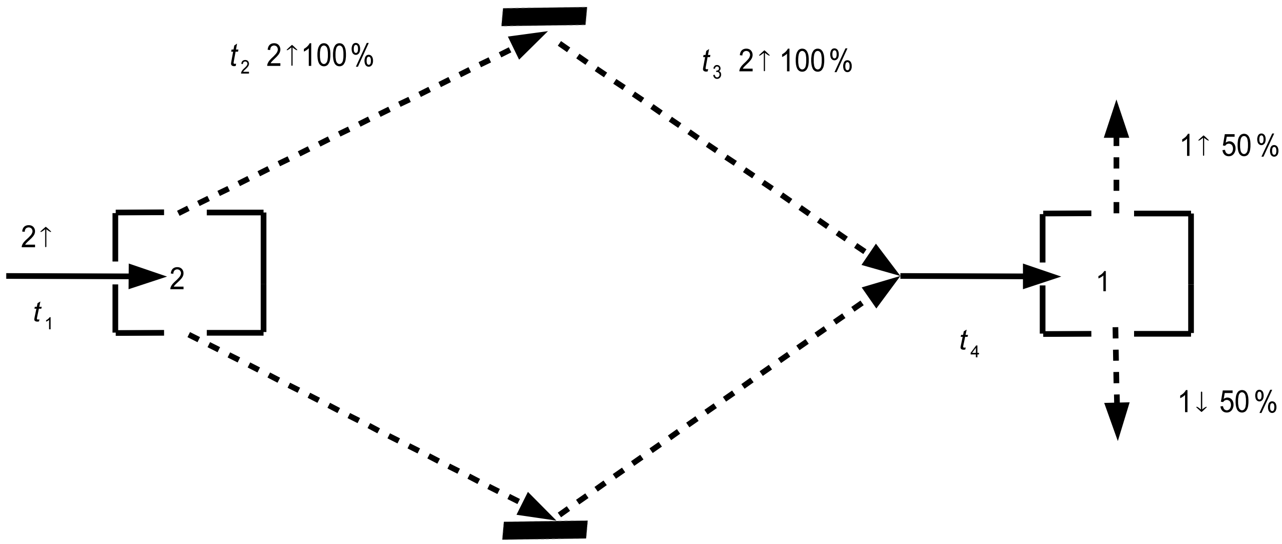
Exemple de *complémentarité* (Bohr) ou *de relation d'indétermination ou d'incertitude d'Heisenberg.*

Interféromètre de Mach-Zehnder



2 chemins, l'un pour les 2 ↑,
l'autre pour les 2 ↓

Si on met des particules avec 2 $\uparrow$ au départ:

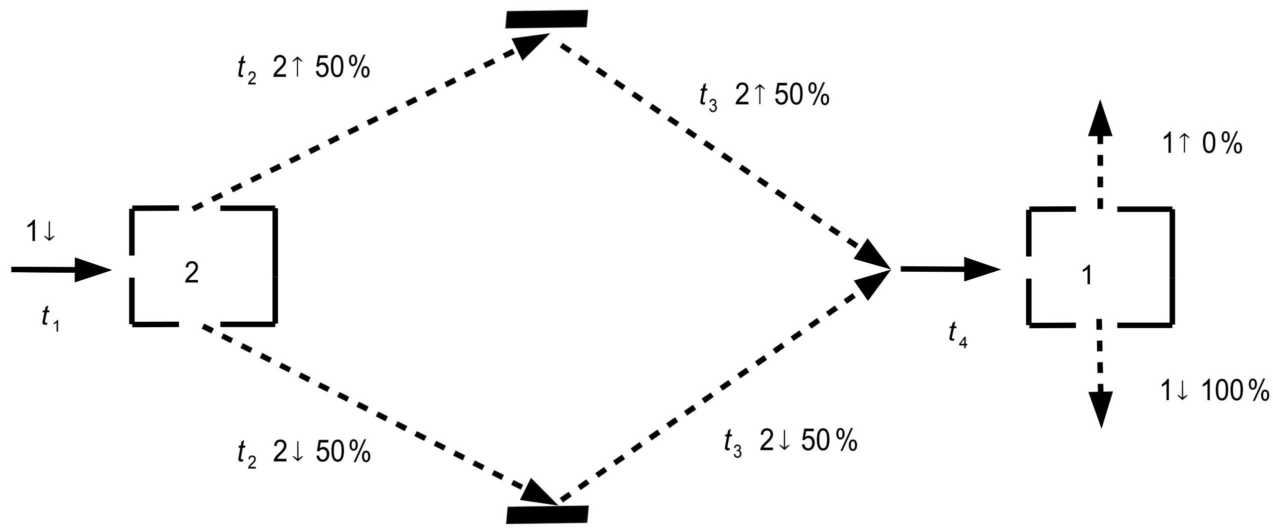


100 % un chemin (2 $\uparrow$)

après la flèche à droite : 50 % 1 $\uparrow$, 50 % 1 $\downarrow$

2 $\downarrow$ au départ 100 % un chemin (2 $\downarrow$), idem après la flèche à droite.

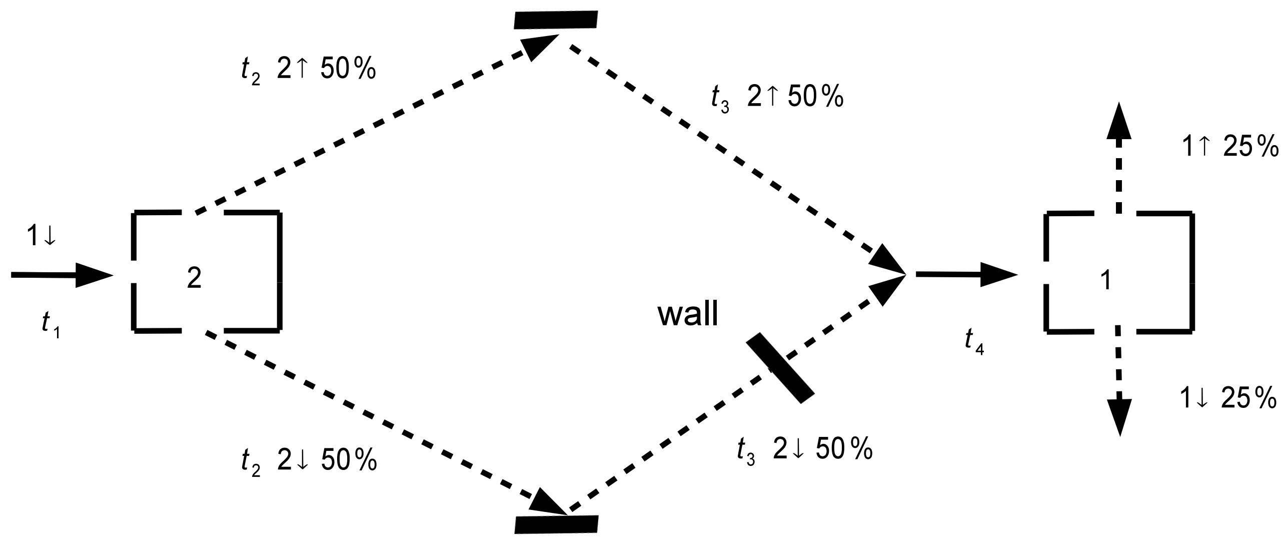
Revenons aux particules avec 1 $\downarrow$ au départ:



1 $\downarrow$ au départ: 50 % un chemin (2 $\uparrow$)
50 % l'autre chemin (2 $\downarrow$)

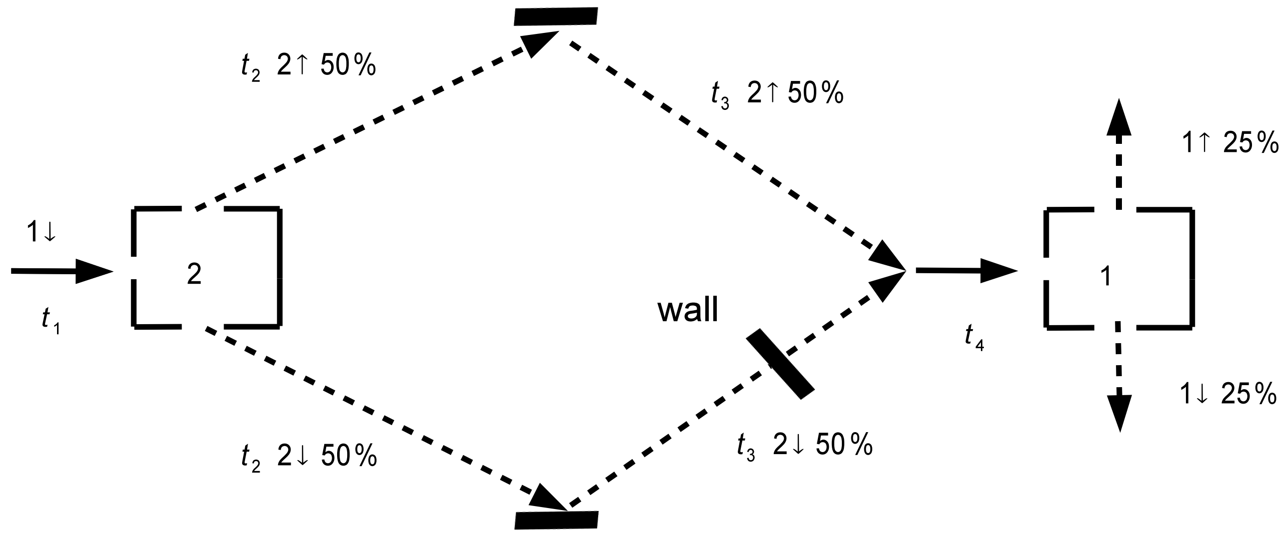
Après la flèche à droite, 100 % 1 $\downarrow$

Interféromètre de Mach-Zehnder avec un obstacle

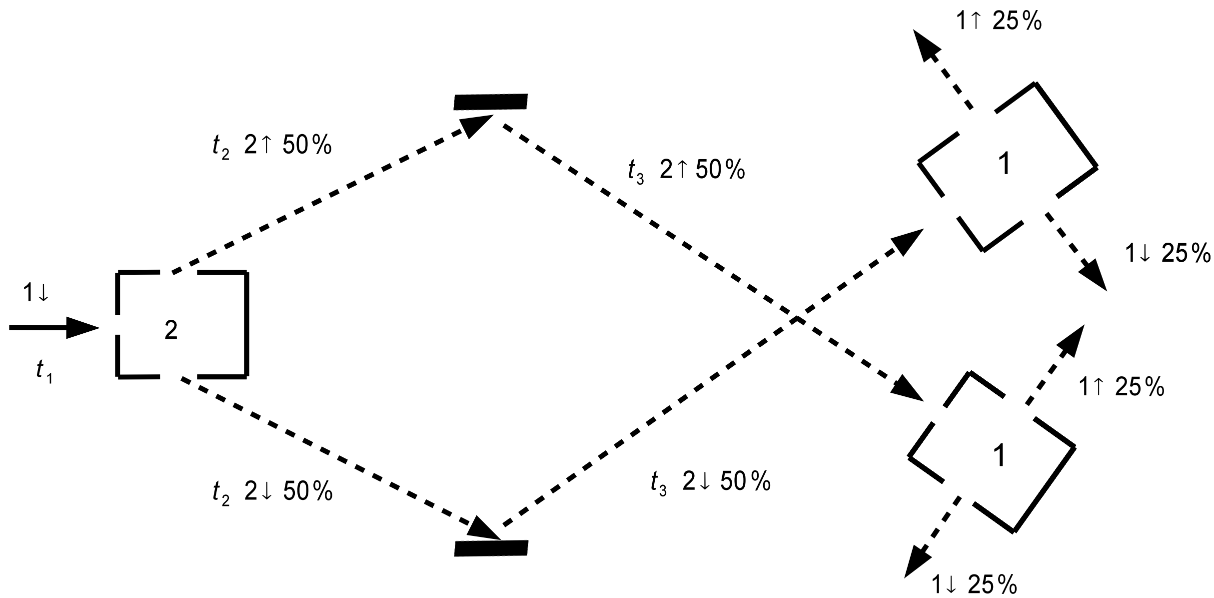


1. 50 % de particules en moins.

2. après la flèche à droite :
sans l'obstacle :
100 % de ceux qui prennent le chemin 2 $\uparrow$ sont 1 $\downarrow$.
Idem pour le chemin 2 $\downarrow$.



Si on bloque le chemin 2 ↓, cela ne peut pas affecter les particules qui prennent le chemin 2 ↑.
Donc, 50 % 1 ↓ (c'est-à-dire 100 % des particules qui restent) ?
NON : 25 % 1 ↓ 25 % 1 ↑ ! On agit d'une certaine façon sur les particules qui prennent un chemin en bloquant le chemin *qu'elles ne prennent PAS !*



Si on ne met pas de flèche à droite, alors les particules continuent leur chemin et dans les deux boîtes à droite les résultats de la mesure dans la direction 1 donnent ce à quoi on s'attend pour des particules $2\uparrow$ ou $2\downarrow$.

Impasse :

Expérience sans obstacle :

Que fait la particule ?

— Suit-elle le chemin 2 $\uparrow$? Non parce que sinon

50 % 1 $\uparrow$ 50 % 1 $\downarrow$ après la flèche à droite.

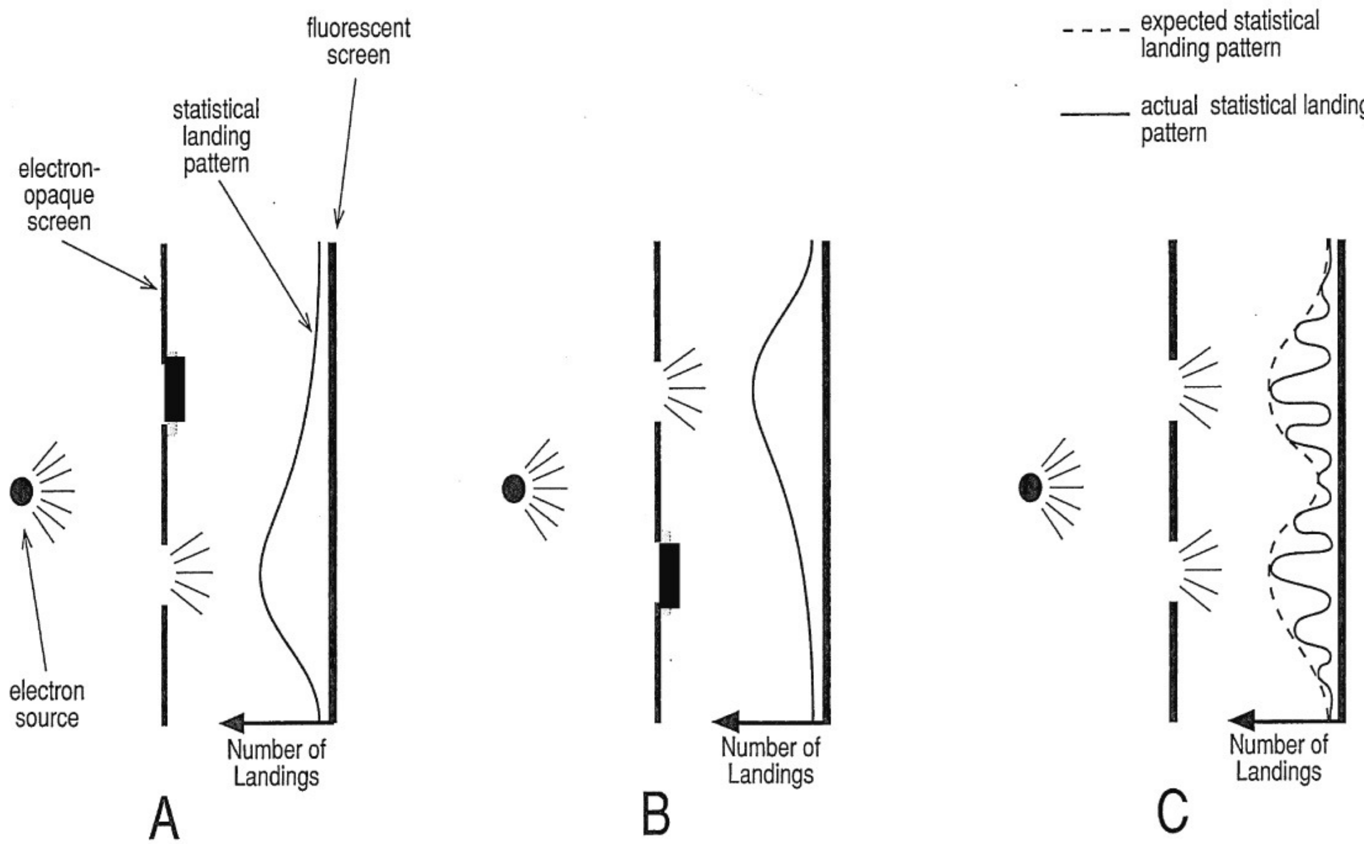
— Le chemin 2 $\downarrow$? Non, pour la même raison.

— Les deux chemins ? Non, on trouve toujours la particule le long d'un des chemins.

— Aucun des chemins ? Non : si on bloque les deux chemins rien ne se passe.

ESSENCE DU MYSTÈRE QUANTIQUE !

AUTRE VERSION



Solution quantique

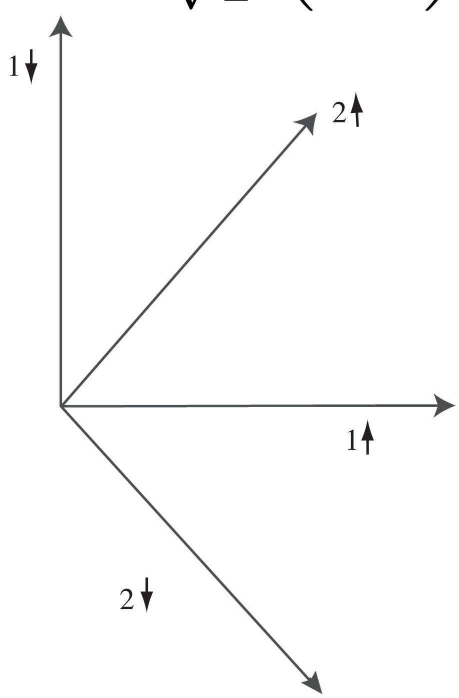
Représenter les états par des vecteurs

$$| 1 \uparrow> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$| 1 \downarrow> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$| 2 \uparrow> = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$| 2 \downarrow> = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



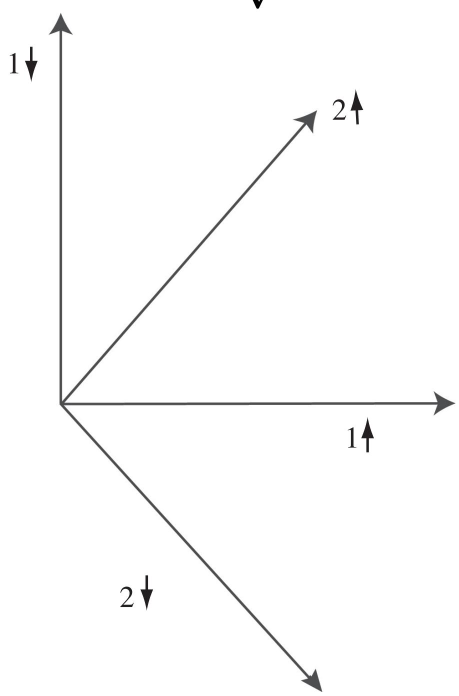
On a les relations:

$$| 2 \uparrow> \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 1 \uparrow> \; + | 1 \downarrow>)$$

$$| 2 \downarrow> = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 1 \uparrow> \; - | 1 \downarrow>)$$

$$| 1 \uparrow> \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 2 \uparrow> \; + | 2 \downarrow>)$$

$$| 1 \downarrow> \; = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 2 \uparrow> \; - | 2 \downarrow>)$$



Règles

1. Caractérisation de l'état d'un système et de son évolution en dehors des mesures.

$$
\begin{aligned}
|\text{ état } > &= c_1(t)\ |1\uparrow> + c_2(t)\ |1\downarrow> \\
&= d_1(t)\ |2\uparrow> + d_2(t)\ |2\downarrow>
\end{aligned}
$$

$c_1(t),\ c_2(t), d_1(t), d_2(t)$

varient au cours du temps

($\sim$ équation de Schrödinger)

$|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$

$|d_1(t)|^2 + |d_2(t)|^2 = 1$

(ci-dessus $|c_1| = |c_2| = |d_1| = |d_2| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$)

Cette évolution est *déterministe*, c'est-à-dire que, si à un instant initial, noté 0, on a un état $|\text{état}(0)\rangle$, alors celui-ci détermine un unique état $|\text{état}(t)\rangle$ pour tous les temps.

Cette évolution est aussi *linéaire*, c'est-à-dire que si, à un instant initial, noté 0, on a:

$$|\text{état}(0)\rangle = c_1|\text{état}_1(0)\rangle + c_2|\text{état}_2(0)\rangle \ ,$$

pour deux états $|\text{état}_1\rangle$ et $|\text{état}_2\rangle$ et des nombres c_1, c_2, alors pour tous les temps, on a:

$$|\text{état}(t)\rangle = c_1|\text{état}_1(t)\rangle + c_2|\text{état}_2(t)\rangle \ .$$

où $|\text{état}_1(t)\rangle$ est l'état au temps t déterminé par l'état initial $|\text{état}_1(0)\rangle$

et $|\text{état}_2(t)\rangle$ est l'état au temps t déterminé par l'état initial $|\text{état}_2(0)\rangle$.

2. Ce qui se passe lors d'une mesure:

Si on mesure le spin dans la direction 1:

On obtient:

$\uparrow$ avec probabilité $|c_1|^2$

$\downarrow$ avec probabilité $|c_2|^2$

$(|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1)$

Si on mesure le spin dans la direction 2:

On obtient:

$\uparrow$ avec probabilité $|d_1|^2$

$\downarrow$ avec probabilité $|d_2|^2$

$(|d_1(t)|^2 + |d_2(t)|^2 = 1)$

Si on mesure le spin dans la direction 1.
Après la mesure
si on "voit" $\uparrow$
$|\text{ état } > \rightarrow |1\uparrow>$
si on voit $\downarrow$
$|\text{ état } > \rightarrow |1\downarrow>$
idem pour mesure dans la direction 2 :
"Réduction de l'état".

Cette réduction de l'état est *incompatible* avec *l'évolution de Schrödinger*.

On a deux règles de l'évolution de l'état mutuellement incompatibles; l'une sur ce qui se passe "en dehors des mesures", l'autre sur ce qui se passe "lors de mesures".

En dehors des mesures, l'évolution de l'état est déterministe et linéaire.

Lors des mesures, l'évolution de l'état est indéterministe et non-linéaire.

PARENTHÈSE: QUID DE LA FONCTION D'ONDE Ψ?

$\Psi(x) =$ ÉTAT, comme ci-dessus.

$x =$ position, comme le spin, mais prend des valeurs "continues" et pas "discrètes".

$|\Psi(x)|^2 =$ (densité de) probabilité de trouver la particule en x si on "mesure" sa position.

Ce n'est PAS la (densité de) probabilité pour la particule *d'être* en x!

$\Psi(x,t)$ varie au cours du temps

selon l'équation de Schrödinger:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi$$

où H est un opérateur

(par exemple, $H = -\Delta + V$).

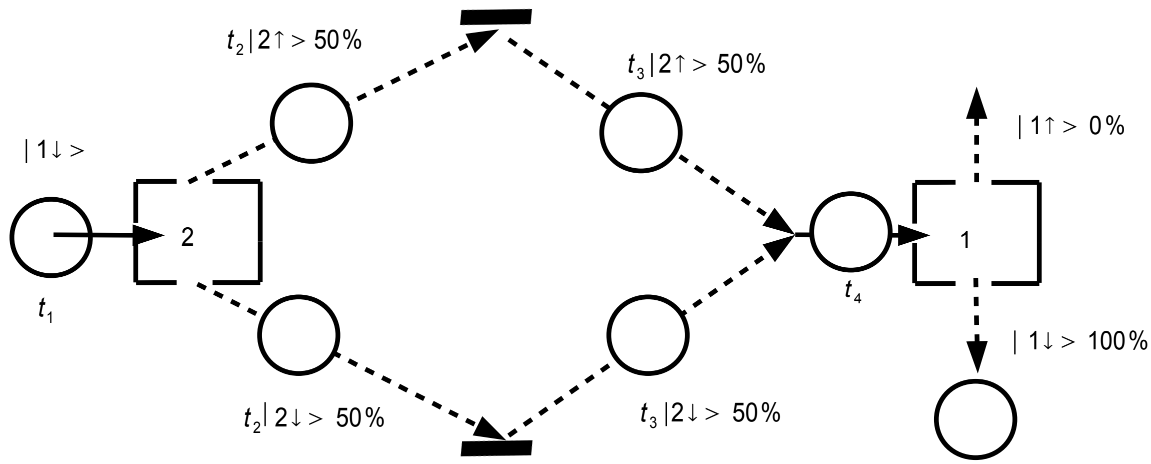
La solution de cette équation satisfait à:

$\int |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$

pour tous les temps, qui est analogue à

$|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$.

Voyons comment cela marche



en t_1

$$| 1 \downarrow > = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 2 \uparrow > \; - | 2 \downarrow >),$$

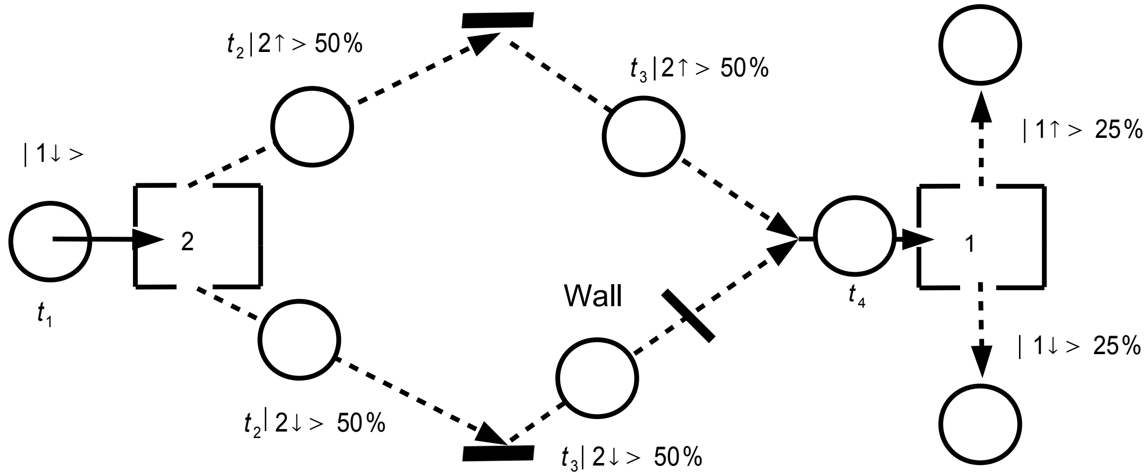
en t_2 et t_3:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2 \uparrow> |\text{chemin2} \uparrow> -|2 \downarrow> |\text{chemin2} \downarrow>),$$

en t_4:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(| 2 \uparrow> \; - | 2 \downarrow>) \mid \text{chemin} \to>$$

$$= | 1 \downarrow> \; | \text{chemin} \to> \to 100\% \; 1 \downarrow$$



Bloquer chemin 2 $\downarrow$. C'est une mesure, donc | l'état > est réduit:

$|$ état $> \rightarrow |2\uparrow>$ $|$ chemin $2\uparrow>$

en t_3

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|1\uparrow> + |1\downarrow>)$ $|$ chemin $\rightarrow>$

en t_4

après la flèche à droite $\rightarrow$ 50 % $\uparrow$ 50 % $\downarrow$.

Ici intervient le rôle essentiel de la "mesure" et donc, de "l'observation".

On dirait que la théorie se préoccupe seulement des "résultats de mesure" et n'a rien à dire sur quoi que ce soit d'autre. Mais qu'est-ce qui permet à certains systèmes physiques de jouer le rôle de "mesureur" ? Est-ce que la fonction d'onde de l'univers a dû attendre des milliers de millions d'années avant de faire un saut, attendant l'apparition d'une créature unicellulaire ? Ou a-t-elle dû attendre plus longtemps, jusqu'à ce qu'apparaisse un système plus qualifié, muni d'un doctorat ?

J. BELL

Le problème de la mesure et de l'observateur est le problème de savoir où la mesure commence et où elle se termine. Prenez mes lunettes par exemple: si je les enlève, à quelle distance dois-je les mettre pour qu'elles fassent partie de l'objet plutôt que de l'observateur ? Il y a des problèmes semblables de la rétine jusqu'au cerveau en passant par le nerf optique. Je pense que quand vous analysez ce langage dans lequel sont tombés les physiciens, à savoir que la physique concerne les résultats d'observations, vous voyez qu'il s'évapore si on l'analyse et que rien de très clair n'est dit.

J.S. BELL

Envisageons maintenant deux “solutions” (qui n’en sont pas, comme on le verra) mais dont l’une ou l’autre est souvent implicitement acceptée par la plupart des physiciens:

1. Si on analyse le processus de mesure de façon quantique, alors le problème de la réduction de l’état quantique disparaît.

2. L’état quantique détermine une distribution statistique des valeurs possibles prises par les quantités mesurables (position, vitesse, énergie etc.). La mesure révèle simplement la valeur pré-existante qu’une de ces quantités prend dans un système quantique donné.

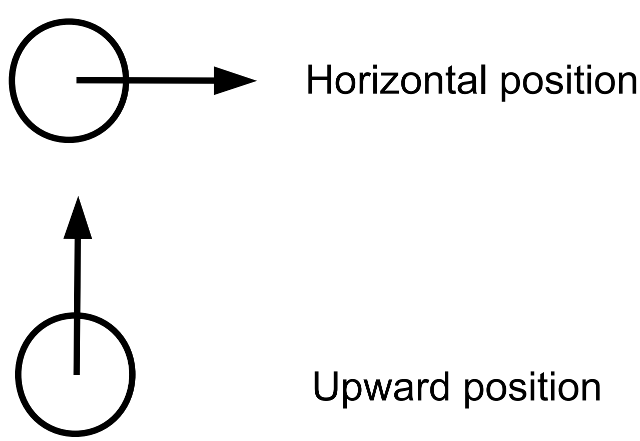
Envisageons d'abord la solution 1.

Processus de mesure (simplifié)

Considérons un état initial de l'objet à mesurer et de l'appareil de mesure.

$\Psi_0 = (c_1|1\uparrow> + c_2|1\downarrow>)\varphi_0(x)$

où x = variable macroscopique = position de l'appareil de mesure et $\varphi_0(x)$ désigne l'état de l'appareil comme dans le haut de la figure:



Et $c_1|1\uparrow> + c_2|1\downarrow>$ correspond à une superposition de spin up et de spin down dans la direction 1 (verticale) avec $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$.

Parenthèse:

Un modèle simplifié de mesure revient à introduire l'hamiltonien d'interaction entre la particule dont le spin doit être mesuré et l'appareil:

$$H = -i\sigma \frac{\partial}{\partial x}$$

où

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'équation d'évolution correspondante est (avec $\hbar = 1$):

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -i\sigma\frac{\partial}{\partial x}\Psi$$

Pour comprendre la solution de cette équation, considérons d'abord un état initial

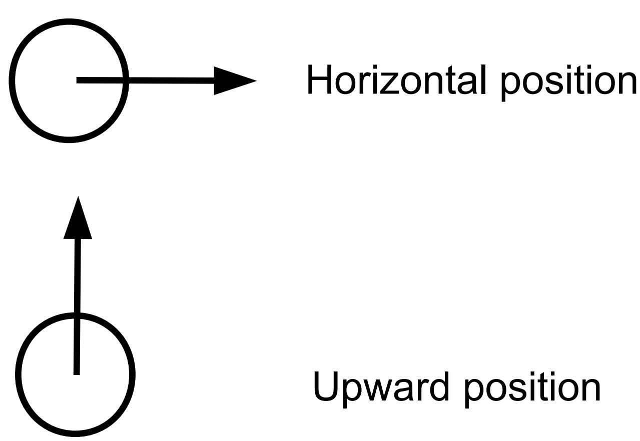
$$|1\uparrow> \varphi_0(x)$$

La solution de l'équation de Schrödinger est, pour cet état initial:

$$|1\uparrow> \varphi_0(x-t)$$

$\varphi_0(x)$ centré en $x=0$

$\varphi_0(x-t)$ centré en $x=t$, comme dans le bas de la figure (pour un temps t approprié):



De même, si on part de l'état initial

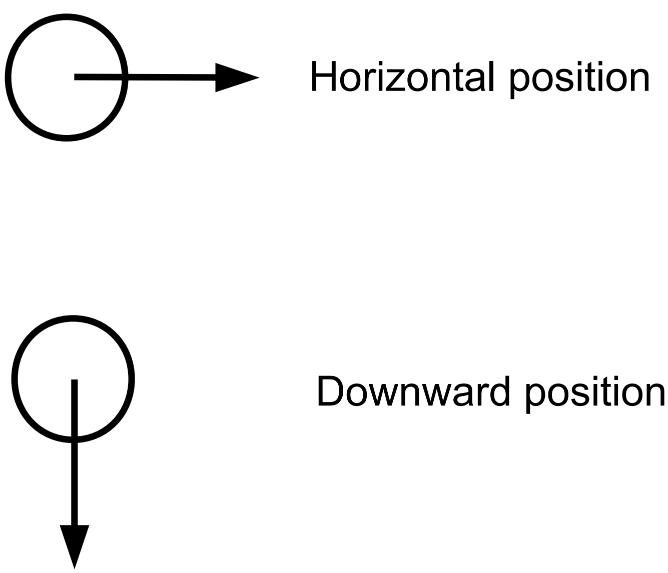
$$|1 \downarrow> \varphi_0(x)$$

La solution de l'équation de Schrödinger sera:

$$|1 \downarrow> \varphi_0(x+t)$$

$\varphi_0(x)$ centré en $x = 0$

$\varphi_0(x+t)$ centré en $x = -t$, comme dans le bas de la figure (pour un temps t approprié):



Maintenant, si l'état initial est:

$\Psi_0 = (c_1|1\uparrow> + c_2|1\downarrow>)\varphi_0(x)$,

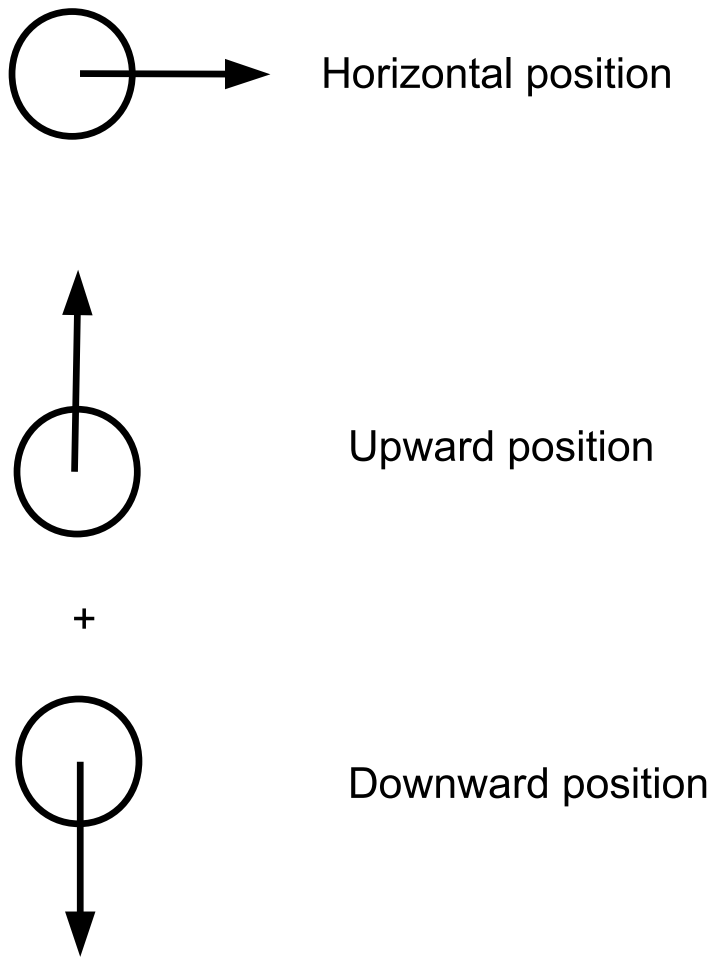
la solution sera, *en vertu uniquement de la linéarité de l'équation de Schrödinger*:

$$c_1|1\uparrow> \varphi_0(x-t) + c_2|1\downarrow> \varphi_0(x+t)$$

Graphiquement, cet état

$$c_1|1\uparrow> \varphi_0(x-t) + c_2|1\downarrow> \varphi_0(x+t)$$

est représenté par la figure du bas:



C'est-à-dire que l'appareil se trouve dans une superposition de deux états macroscopiquement distincts :

Le pointeur est *"vers le haut" et "vers le bas"*.

Mais, comme la situation est macroscopique

$\rightarrow$ on peut *regarder*.

Si vers le haut $\rightarrow \quad |1\uparrow> \varphi_0(x-t)$

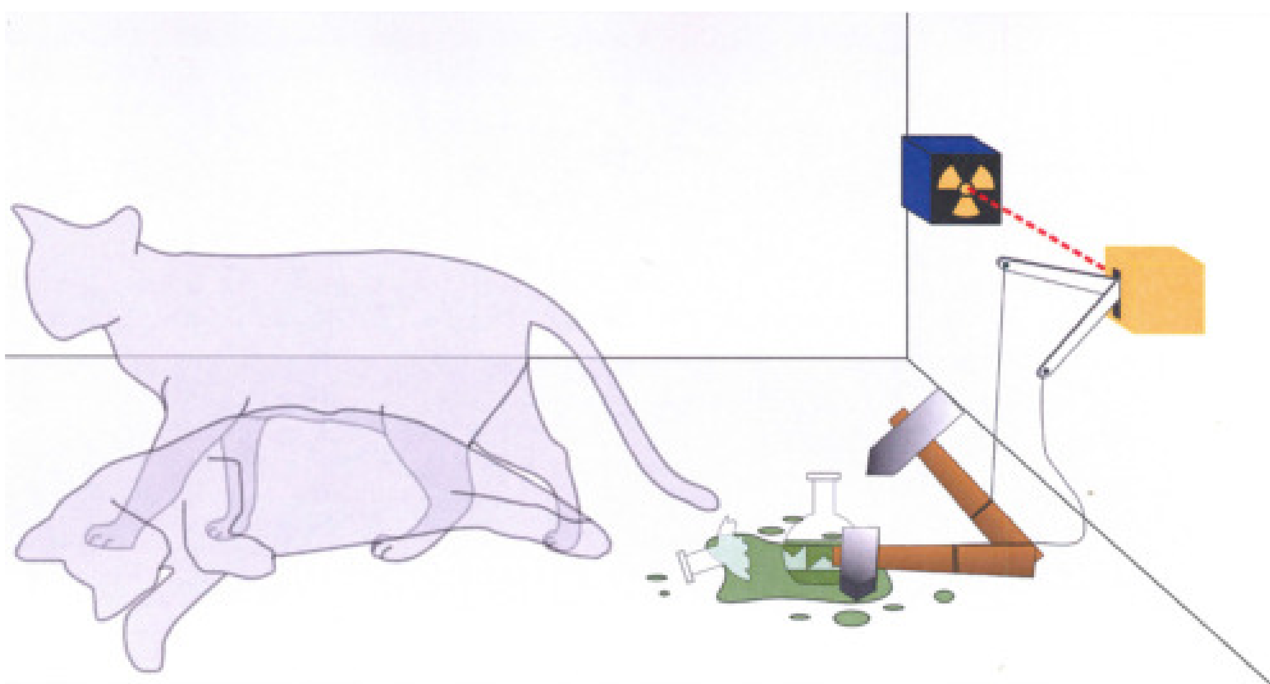
Si vers le bas $\rightarrow \quad |1\downarrow> \varphi_0(x+t)$

On réduit alors l'état quantique.

Problème du chat de Schrödinger:

$$c_1|1\uparrow> \varphi_0(x-t)|\text{chat vivant}>$$
$$+c_2|1\downarrow> \varphi_0(x+t)|\text{chat mort}>$$

"On mesure $\uparrow$" $\rightarrow$ le chat reste vivant,
"on mesure $\downarrow$" $\rightarrow$ le chat meurt.



La conclusion naturelle à tirer de cette analyse est que la description quantique n'est pas "complète", au moins pour ce qui concerne le chat ou le pointeur. Il existe des variables supplémentaires qui caractérisent l'état du chat (vivant ou mort) ou du pointeur (vers le haut ou le bas).

On appelle en général ces variables des "variables cachées", terme qui dans le cas du chat ou du pointeur, est manifestement inadéquat: la seule chose qui soit directement visible par nous c'est justement l'état du chat ou du pointeur.

Ne serait-il pas naturel d'introduire des "variables cachées" non seulement au niveau macroscopique (chat ou pointeur), mais aussi au niveau microscopique (particules et leur spin)?

Ce qui signifie que des expériences bien faites révèleraient des propriétés préexistantes (mais inconnues et incontrôlables) du système, telles que le spin (up ou down) dans les directions 1 ou 2.

Et que l'état quantique donnerait une distribution statistique de ces propriétés.

C'est la deuxième solution mentionnée plus haut.

Par exemple, un état tel que:

$c_1(t)|1\uparrow> + c_2(t)|1\downarrow>$

caractériserait un *ensemble* de particules (et non pas une particule individuelle) dont une fraction $|c_1(t)|^2$ auraient leur spin up et une fraction $|c_2(t)|^2$ auraient leur spin down.

(Rappel: on a toujours $|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$).

Ceci signifie évidemment que la mécanique quantique est *incomplète*, puisque l'état complet d'un système individuel serait donné par l'état quantique *plus* les valeurs de ces "variables cachées".

On appelle parfois cette solution *l'interprétation statistique de la mécanique quantique.*

Elle est extrêmement NATURELLE!

Et elle est probablement celle qu'ont "derrière la tête" la plupart des physiciens qui ne se posent pas trop de questions sur la mécanique quantique.

Essayons de formaliser cette idée: il existe une série de quantités qu'on peut "mesurer": le spin, mais aussi la position, la vitesse, l'énergie, le moment angulaire etc.

Soit $\mathcal{A}$ = ensemble des quantités "mesurables"

et $\quad \forall\, A \in \mathcal{A}$
soit $v(A)$ = la valeur préexistante, mais inconnue de A dans un système quantique donné.

L'interprétation statistique signifie que l'état d'une particule individuelle est associé à une fonction v comme ci-dessus et que l'état quantique détermine une distribution statistique de telles fonctions.

Malheureusement cette "solution" mène à une contradiction!

Théorème sur l'inexistence de "variables cachées"

(Kochen-Specker, Gleason, Bell, Mermin)

"variables cachées"= propriétés préexistantes (mais inconnues) du système.

$\nexists$ fonction $\quad v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ où

$\mathcal{A} =$ ensemble de quantités "mesurables"

et $v(A) =$ valeur préexistante, mais inconnue de A,

telle que $\quad \forall\, A \in \mathcal{A}$,

$v(A) \in$ {résultats possibles obtenus lors de la mesure de la quantité A}.

Ce théorème rend intenable l'interprétation statistique.

En effet, si des fonctions telles que v n'existent pas, on ne peut pas penser qu'il existe une distribution statistique sur ces fonctions!

Donc, au moins pour *certaines* quantités, la "mesure" ne mesure rien de préexistant et doit être vue comme une sorte *d'interaction* entre l'objet "mesuré" et l'appareil. Ceci signifie que l'appareil a un rôle "actif".

MAIS le chat possède des “variables cachées”– qui ne sont pas cachées du tout– il est vivant OU mort. L’état superposé vivant + mort ne décrit pas entièrement l’état du chat. *Pour le chat,* la mécanique quantique *est* incomplète.

Une façon de poser le problème: où mettre la limite entre objets “quantiques” et “classiques” (appareils de mesure ou chat)? Comment passe-t-on de *et* (états superposés, “spin up et down”) à *ou* (“chat vivant ou mort”)?

La limite est arbitraire et empêche le réductionnisme.

REACTIONS

— "Pragmatisme": renoncer à décrire ce qui se passe en dehors des laboratoires; fin de la physique.

— Nier le problème (mauvaise philosophie, idéalisme, instrumentalisme)

— Autre ? $\rightarrow$ 3$^{\text{e}}$ cours

— Mais avant cela, autre mystère, le théorème de Bell et la non localité $\rightarrow$ 2$^{\text{e}}$ cours.

REMARQUES TECHNIQUES

$\mathcal{A}$ est représenté mathématiquement par un ensemble de matrices (pour le spin des particules par exemple), ou par des opérateurs associés aux positions et aux vitesses possibles d'une particule.

En pratique, vu que ces matrices ou opérateurs sont auto-adjoints, cela revient à associer à $\forall A \in \mathcal{A}$ une base $|e_i>$ et à faire correspondre à chaque $|e_i>$ un nombre λ_i.

Les vecteurs $|e_i>$ sont appelés les vecteurs propres de $A \in \mathcal{A}$ et les nombres λ_i les valeurs propres de $A \in \mathcal{A}$.

Ces bases sont comme celles vue précédemment, mais dans des espaces à plus de deux dimensions (et même de dimension infinie). On peut avoir une base avec

$|e_1 >= |1 \uparrow>$ et $|e_2 >= |1 \downarrow>$:

$$|e_1 >= |\ 1 \uparrow> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

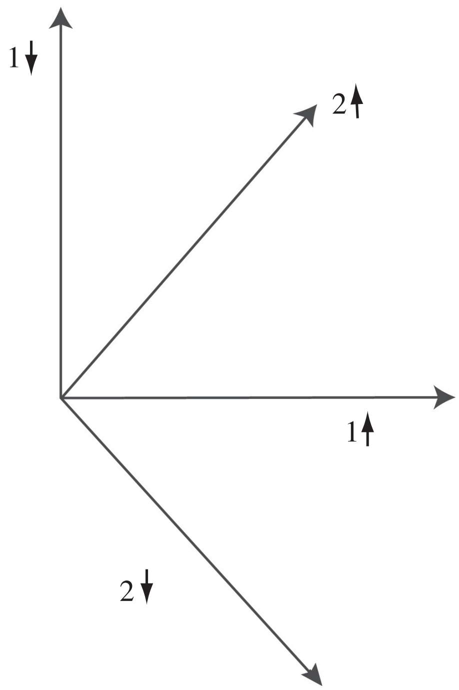
$$|e_2 >= |\ 1 \downarrow> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et une autre base avec

$|e_1 >= |2 \uparrow>$ et $|e_2 >= |2 \downarrow>$:

$$|e_1 >= |\ 2 \uparrow> = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|e_2 >= |\ 2 \downarrow> = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



On peut dans chaque cas associer à $|e_1>$ le nombre $\lambda_1 = 1$ et à $|e_2>$ le nombre $\lambda_2 = -1$ (pour remplacer les mots "up" et "down").

Dans ce cadre général, un état quantique est simplement un vecteur $|e(t) >$, variant dans le temps, et qui peut s'écrire comme une somme de vecteurs dans n'importe quelle base donnée:

$$|e(t)>= \sum_i c_i(t)|e_i> .$$

avec $\sum_i |c_i(t)|^2 = 1, \forall t.$

La recette quantique générale est que, si l'on mesure la quantité $A \in \mathcal{A}$, on obtient le résultat λ_i avec une probabilité $|c_i(t)|^2$ et, qu'après la mesure, l'état est réduit à $|e_i>$.

C'est une généralisation naturelle de ce que nous avons vu avec les bases $|1 \uparrow>$, $|1 \downarrow>$ ou $|2 \uparrow>$, $|2 \downarrow>$.

Les propriétés que la fonction $v(A)$ devrait posséder sont:

$$(1) \forall A \in \mathcal{A}\ , \quad v(A) \in \{\text{valeurs propres de A}\}\ ,$$

$$(2) \forall A, B \in \mathcal{A}, \text{avec } [A, B] = AB - BA = 0,$$

$$v(AB) = v(A)v(B),$$

où AB est le produit des matrices (ou des opérateurs).

Le fait que $[A, B] = AB - BA = 0$ signifie, dans le formalisme habituel, que l'on peut "mesurer simultanément" les quantités représentées par A et B et AB, c'est-à-dire que la mesure d'une quantité n'affecte pas la mesure de l'autre et ceci implique que l'identité $v(AB) = v(A)v(B)$ (si la fonction v existait) serait une conséquence du formalisme quantique.

L'énoncé précis du théorème sur l'inexistence de "variables cachées" est qu'il n'existe pas de fonction v satisfaisant ces deux propriétés:

$$(1) \forall A \in \mathcal{A} \ , \quad v(A) \in \{\text{valeurs propres de A}\} \ ,$$

$$(2) \forall A, B \in \mathcal{A}, \text{avec } [A, B] = AB - BA = 0,$$

$$v(AB) = v(A)v(B),$$

où AB est le produit des matrices (ou des opérateurs).

Démonstration

Soient $\sigma_x^{\ i} \quad \sigma_y^{\ i} \qquad i = 1, 2,$ une paire de matrices de Pauli usuelles, avec le produit tensoriel implicite:

$\sigma_\alpha^{\ 1} = \sigma_\alpha^{\ 1} \otimes 1 \qquad \sigma_\alpha^2 = 1 \otimes \sigma_\alpha^{\ 2} \quad \alpha = x, y.$

On a

$$(\sigma_x^{\ i})^2 = (\sigma_y^{\ i})^2 = 1 \quad i = 1, 2$$

$$\sigma_x^{\ i}\sigma_y^{\ i} = -\sigma_y^{\ i}\sigma_x^{\ i} \quad i = 1, 2$$

$$\sigma_\alpha^{\ 1}\sigma_\beta^{\ 2} = \sigma_\alpha^{\ 2}\sigma_\beta^{\ 1} \quad \alpha, \beta = x, y$$

On en déduit l'identité

$$\sigma_x^{\ 1}\sigma_y^{\ 2}\sigma_y^{\ 1}\sigma_x^{\ 2}\sigma_x^{\ 1}\sigma_x^{\ 2}\sigma_y^{\ 1}\sigma_y^{\ 2}$$
$$= -1$$

car, en utilisant les relations de commutation et d'anti-commutation ci-dessus:

$$\sigma_x^{\ 1}\sigma_y^{\ 2}\sigma_y^{\ 1}\sigma_x^{\ 2}\sigma_x^{\ 1}\sigma_x^{\ 2}\sigma_y^{\ 1}\sigma_y^{\ 2}$$
$$= -\sigma_y^{\ 2}\sigma_y^{\ 1}\sigma_x^{\ 2}\sigma_x^{\ 1}\sigma_x^{\ 1}\sigma_x^{\ 2}\sigma_y^{\ 1}\sigma_y^{\ 2},$$

qui vaut $= -1$ en utilisant $(\sigma_x^{\ i})^2 = (\sigma_y^{\ i})^2 = 1$.

Soit
$$X = {\sigma_x}^1{\sigma_y}^2{\sigma_y}^1{\sigma_x}^2$$
$$Y = {\sigma_x}^1{\sigma_x}^2{\sigma_y}^1{\sigma_y}^2$$
Par définition:
$${\sigma_x}^1{\sigma_y}^2{\sigma_y}^1{\sigma_x}^2{\sigma_x}^1{\sigma_x}^2{\sigma_y}^1{\sigma_y}^2$$
$$= XY.$$

On a, en utilisant les relations de commutation et d'anti-commutation ci-dessus:

$$[X, Y] = 0 \rightarrow v(XY) = -1 = v(X)v(Y)$$

par notre hypothèse.

$X = A \cdot B$

où

$A = {\sigma_x}^1{\sigma_y}^2 \qquad B = {\sigma_y}^1{\sigma_x}^2$

et $Y = C \cdot D$

où

$C = {\sigma_x}^1{\sigma_x}^2 \qquad D = {\sigma_y}^1{\sigma_y}^2.$

On vérifie que:
$[A, B] = [C, D] = 0.$
Donc, de nouveau par notre hypothèse:
$v(X) = v(A \cdot B) = v(A)v(B),$
$v(Y) = v(C \cdot D) = v(C)v(D).$
Donc,

$$\begin{aligned} -1 &= v(XY) = v(X)v(Y) \\ &= v(A)v(B)v(C)v(D). \end{aligned}$$

A, B, C, D sont des produits de matrices qui commutent (indices 1 et 2). Donc,

$$\begin{aligned} v(A) &= v({\sigma_x}^1 {\sigma_y}^2) = v({\sigma_x}^1) v({\sigma_y}^2) \\ v(B) &= v({\sigma_y}^1 {\sigma_x}^2) = v({\sigma_y}^1) v({\sigma_x}^2) \\ v(C) &= v({\sigma_x}^1 {\sigma_x}^2) = v({\sigma_x}^1) v({\sigma_x}^2) \\ v(D) &= v({\sigma_y}^1 {\sigma_y}^2) = v({\sigma_y}^1) v({\sigma_y}^2) \end{aligned}$$

On a montré que

$$\begin{aligned} -1 &= v(XY) = v(X)v(Y) \\ &= v(A)v(B)v(C)v(D). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} -1 &= v(A)v(B)v(C)v(D) \\ &= v({\sigma_x}^1) v({\sigma_y}^2) v({\sigma_y}^1) v({\sigma_x}^2) \\ &\quad v({\sigma_x}^1) v({\sigma_x}^2) v({\sigma_y}^1) v({\sigma_y}^2) \\ &= v({\sigma_x}^1)^2 v({\sigma_y}^2)^2 v({\sigma_y}^1)^2 v({\sigma_x}^2)^2 = 1 \end{aligned}$$

puisque les valeurs propres des matrices de Pauli ${\sigma_\alpha}^1$, ${\sigma_\alpha}^2$ sont égales à ± 1.

Ce qui est une contradiction!