Fehlende Beweise im Beweis zu Stickelbergers Satz

20. 12. 2024

<u>Lemma:</u> Sei L ein Zahlkörper mit $\zeta_m \in L$. Sei $F = L(\beta)$ und es gelte:

$$\beta^m \in L, \quad \beta^m \mathcal{O}_L = \mathfrak{b}^m$$

für ein ganzes Ideal $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathcal{O}_L$. Dann ist $F|L$ unverzweigt außerhalb m.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal in L. oE können wir annehmen, daß $\mathcal{O}_L$ ein HIR ist (lokalisiere dazu nach $S := \mathcal{O}_L \setminus \mathfrak{q}$).

Sei also $\mathfrak{b} = b\mathcal{O}_L \Rightarrow \beta^m \mathcal{O}_L = b^m \mathcal{O}_L$

$\Rightarrow \beta^m = b^m u$ mit $u \in \mathcal{O}_L^\times$

$\Rightarrow F = L(\sqrt[m]{u})$ und für die Diskriminante von $\sqrt[m]{u}$ gilt:

$$d(\sqrt[m]{u}) = N_{F|L}(m u^{m-1}) \sim m^{[F:L]}$$

Aus $d_{F|K} \mid d(\sqrt[m]{u})$ folgt die Behauptung.

$\blacksquare$

<u>Anwendung:</u> Nimm

$$L = \mathbb{Q}(\zeta_m), \quad F = \mathbb{Q}(\zeta_m, \gamma^\beta)$$

Wir haben gezeigt: $\left(\left(\mathfrak{a}\,\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_m)}\right)^{\beta\theta}\right)^m = (\gamma^\beta)^m$

Lemma $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}(\zeta_m, \gamma^\beta) / \mathbb{Q}(\zeta_m)$ ist unverzweigt außerhalb m

Wegen $\mathbb{Q}(\zeta_m) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_m, p^\beta) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{mP})$, $P = \prod p_i$, $(m,P) = 1$,
ist jedoch $\mathbb{Q}(\zeta_m, p^\beta)/\mathbb{Q}(\zeta_m)$ höchstens über P verzweigt. Also ist die Erweiterung unverzweigt. $\blacksquare$

<u>Lemma:</u> Sei $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_m) \subseteq L$ und
a) $L/\mathbb{Q}$ abelsch
b) $L/\mathbb{Q}(\zeta_m)$ unverzweigt an allen endlichen Stellen.

Dann gilt: $L = \mathbb{Q}(\zeta_m)$.

<u>Anwendung:</u> $\mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_m, p^\beta)$, also $p^\beta \in \mathbb{Q}(\zeta_m)$

<u>Beweis des Lemmas:</u> Sei n der Führer von L, d.h. $\mathbb{Q}(\zeta_m) \subseteq L \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n)$. Man sieht am Fall $n = m p_1 p_2$ was passiert. Hier ist $p_1 = p_2$ erlaubt.

Betrachte

$$\begin{tikzcd}
 & & L(\zeta_{mp_1}) \\
\mathbb{Q}(\zeta_{mp_1}) \arrow[urr, dash] \arrow[d, dash, "\text{voll verzw. über } p_1"'] & & \\
 & & L \arrow[uu, dash] \\
\mathbb{Q}(\zeta_m) \arrow[urr, dash, "d", "\text{unverzweigt}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$
- $\mathbb{Q}(\zeta_{mp_1}) \cap L = \mathbb{Q}(\zeta_m)$
- $L(\zeta_{mp_1})/\mathbb{Q}(\zeta_{mp_1})$ ist unverzweigt
- $[L(\zeta_{mp_1}) : \mathbb{Q}(\zeta_{mp_1})] = d$

Betrachte also nun $L(J_{mp_1}) / \mathbb{Q}(J_{mp_1})$. Wir erhalten das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & & L(J_{mp_1p_2}) \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Q}(J_{mp_1p_2}) \arrow[urr, dash] \arrow[d, dash, "\text{voll verzweigt über } p_2"'] & & L(J_{mp_1}) \\
\mathbb{Q}(J_{mp_1}) \arrow[urr, dash, "d", "\text{unverzw.}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{cases} \cdot\ \mathbb{Q}(J_{mp_1p_2}) \cap L(J_{mp_1}) = \mathbb{Q}(J_{mp_1}), \\ \cdot\ L(J_{mp_1p_2}) / \mathbb{Q}(J_{mp_1p_2}) \text{ unverzweigt}, \\ \cdot\ [L(J_{\underbrace{mp_1p_2}_{=n}}) : \mathbb{Q}(J_{\underbrace{mp_1p_2}_{n}})] = d \end{cases}
$$

Aus $1 = [L(J_n) : \mathbb{Q}(J_n)] = d$ folgt die Beh. $\blacksquare$