

Fehlende Beweise im Beweis zu
Stickelbugers Satz

20. 12. 2024



Lemma: Sei L ein Zahlkörper mit $\mathbb{Z}_m \in L$.

Sei $F = L(\beta)$ und es gelte:

$$\beta^m \in L, \quad \beta^m \mathcal{O}_L = \mathfrak{b}^m$$

für ein ganzes Ideal $\mathfrak{b} \subseteq \mathcal{O}_L$. Dann ist F/L unverzweigt außerhalb m .

Beweis: Sei \mathfrak{a}_f ein Primideal in L . \mathfrak{o}_E können wir annehmen, daß \mathcal{O}_L ein HIR ist (lokalisieren dazu nach $S := \mathcal{O}_L \setminus \mathfrak{a}_f$).

$$\text{Sei also } \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \mathcal{O}_L \Rightarrow \beta^m \mathcal{O}_L = \mathfrak{b}^m \mathcal{O}_L$$

$$\Rightarrow \beta^m = \mathfrak{b}^m u \text{ mit } u \in \mathcal{O}_L^\times$$

$\Rightarrow F = L(\sqrt[m]{u})$ und für die Diskriminante von $\sqrt[m]{u}$ gilt:

$$d(\sqrt[m]{u}) = N_{F/L}(m u^{m-1}) \sim m^{[F:L]}$$

Aus $d_{F/K} \mid d(\sqrt[m]{u})$ folgt die Behauptung.

□

Anwendung: Nimm

$$L = \mathbb{Q}(\mathbb{Z}_m), \quad F = \mathbb{Q}(\mathbb{Z}_m, \gamma^\beta)$$

$$\text{Wir haben gezeigt: } \left(\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}(\mathbb{Z}_m)} \right)^{\beta \Theta} \right)^m = (\gamma^\beta)^m$$

Lemma $\Rightarrow \mathbb{Q}(\mathbb{Z}_m, \gamma^\beta) / \mathbb{Q}(\mathbb{Z}_m)$ ist unverzweigt außerhalb m

Wegen $\mathbb{Q}(I_m) \subseteq \mathbb{Q}(I_m, \rho^\beta) \subseteq \mathbb{Q}(I_{m^P})$, $P = \prod p_i$

$$(m, P) = 1.$$

ist jedoch $\mathbb{Q}(I_m, \rho^\beta) / \mathbb{Q}(I_m)$ höchstens über P verzweigt. Also ist die Erweiterung unverzweigt. ▢

Lemma: Sei $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(I_m) \subseteq L$ und

a) L/\mathbb{Q} abelsch

b) $L/\mathbb{Q}(I_m)$ unverzweigt an allen endlichen Stellen.

Dann gilt: $L = \mathbb{Q}(I_m)$.

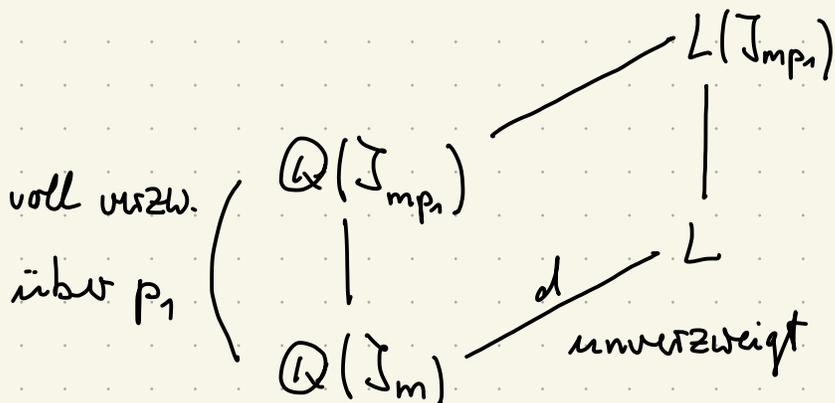
Anwendung: $\mathbb{Q}(I_m) = \mathbb{Q}(I_m, \rho^\beta)$, also $\rho^\beta \in \mathbb{Q}(I_m)$

Beweis des Lemmas: Sei n der Führer von L , d.h.

$\mathbb{Q}(I_m) \subseteq L \subseteq \mathbb{Q}(I_n)$. Man sieht am Fall

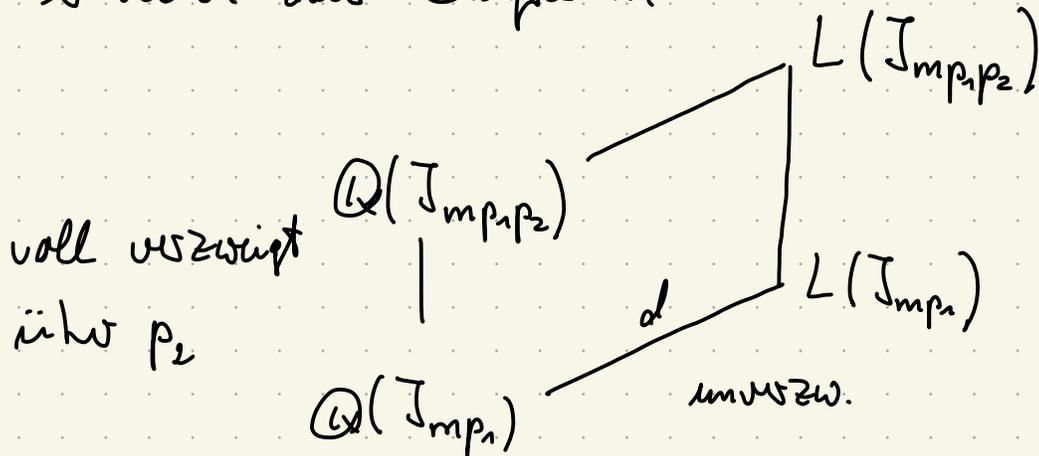
$n = mp_1 p_2$ was passiert. Hier ist $p_1 = p_2$ erlaubt.

Betrachte



$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 \bullet \mathbb{Q}(I_{mp_1}) \cap L = \mathbb{Q}(I_m) \\
 \bullet L(I_{mp_1}) / \mathbb{Q}(I_{mp_1}) \text{ ist unverzweigt} \\
 \bullet [L(I_{mp_1}) : \mathbb{Q}(I_{mp_1})] = d
 \end{array} \right.$$

Betrachte also nun $L(\mathcal{I}_{mp_1}) / \mathcal{Q}(\mathcal{I}_{mp_1})$. Wir erhalten das Diagramm



$$\Rightarrow \begin{cases} \cdot \mathcal{Q}(\mathcal{I}_{mp_1 p_2}) \cap L(\mathcal{I}_{mp_1}) = \mathcal{Q}(\mathcal{I}_{mp_1}), \\ \cdot L(\mathcal{I}_{mp_1 p_2}) / \mathcal{Q}(\mathcal{I}_{mp_1 p_2}) \text{ unverzweigt,} \\ \cdot \underbrace{[L(\mathcal{I}_{mp_1 p_2}) : \mathcal{Q}(\mathcal{I}_{mp_1 p_2})]}_{=n} = d \end{cases}$$

Aus Beh. $1 = \underbrace{[L(\mathcal{I}_n) : \mathcal{Q}(\mathcal{I}_n)]}_{=n} = d$ folgt die □