FRAGEN ZUR RINGTHEORIE

Die folgenden 3^3 Fragen und Aufgaben zur Ringtheorie sollten Sie aus dem Stegreif beantworten und lösen können.

(1) Sei p eine Primzahl. Dann ist $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ein Körper mit p^2 Elementen?
(2) Sei R ein Integritätsbereich. Zeige: $|R| < \infty \implies R$ ist ein Körper.
(3) Zeige: $p = 3$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$, $i^2 = -1$.
(4) $\mathbb{Z}[i]/3\mathbb{Z}[i]$ ist ein Körper mit 9 Elementen.
(5) Gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 1 \pmod{200}$ und $x \equiv 2 \pmod{207}$?
(6) Gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 1 \pmod{200}$ und $x \equiv 2 \pmod{85}$?
(7) Bestimme einen Hauptidealerzeuger des $\mathbb{Z}$-Ideals $(7, 21)$.
(8) Bestimme einen Hauptidealerzeuger des $\mathbb{Z}$-Ideals $(7) \cap (21)$.
(9) Seien I, J Ideale im kommutativen Ring R. Dann ist $\{ab \mid a \in I, b \in J\}$ ebenfalls ein Ideal in R?
(10) Bestimme die sämtlichen Ideale von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
(11) Bestimme die sämtlichen Ideale eines Körpers K.
(12) Ein Ringhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow S$ induziert stets einen Isomorphismus $\bar{f}\colon R/\ker(f) \longrightarrow S$?
(13) Zeige: In $\mathbb{Z}$ ist jedes Primideal $\neq 0$ maximal.
(14) Zeige: In $K[x]$ (K ein Körper) ist jedes Primideal $\neq 0$ maximal.
(15) Zeige oder widerlege: In einem faktoriellen Ring ist jedes Primideal maximal.
(16) Zeige: Die Eulersche φ-Funktion ist multiplikativ.
(17) Berechne die Kardinalität von $(\mathbb{Z}/50\mathbb{Z})^\times$.
(18) Zeige: 2 ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.
(19) In $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ gilt $2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$. Folgere daraus, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ kein Hauptidealring ist.
(20) Gib einen faktoriellen Ring an, der kein Hauptidealring ist.
(21) Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$. Zeige oder widerlege: f irreduzibel in $\mathbb{Q}[x] \implies f$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$.
(22) Ist x ein Primelement in $\mathbb{Z}[x, y]$?
(23) Sei $\alpha \in \mathbb{Z}$ eine Nullstelle von $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Zeige: $\alpha | a_0$.
(24) Ist $2x^{17} + \frac{10}{7}x^7 + \frac{10}{7}$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$?
(25) Bestimme alle irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 3 in $\mathbb{F}_2[x]$.
(26) Sei p eine Primzahl und für $a \in \mathbb{Z}$ gelte $p \nmid a$. Zeige: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
(27) Sei R ein kommutativer Ring. Zeige: $(u) = R \iff u \in R^\times$.

Date: 13. Dezember 2024.