FRAGEN ZUR GRUPPENTHEORIE

Die folgenden 3³ Fragen und Aufgaben zur Gruppentheorie sollten Sie aus dem Stegreif beantworten und lösen können.

- (1) Beweisen Sie: Gruppen von Primzahlordnung sind stets abelsch.
- (2) Geben Sie die kleinste nicht-abelsche Gruppe an.
- (3) Geben Sie eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 12 an.
- (4) Beweisen Sie: Untergruppen einer endlichen zyklischen Gruppe sind endlich und zyklisch.
- (5) Sei $C = \langle a \rangle$ eine zyklische Gruppe von unendlicher Ordnung. Zeige, dass a und a^{-1} die einzigen Erzeuger von C sind.
- (6) Sei G endlich und U eine Untergruppe. Zeige: Dann teilt $|U|$ die Gruppenordnung $|G|$.
- (7) Zeige: Sei $a \in G$. Dann ist $\text{ord}(a)$ ein Teiler von $|G|$.
- (8) Formulieren Sie den Satz von Lagrange.
- (9) Sei G isomorph zu $C_2 \times C_2$. Zeige: Dann hat G drei Untergruppen der Ordnung 2.
- (10) Zeige oder widerlege: Für Untergruppen $U_1, U_2 \leq G$ ist $U_1 U_2$ stets eine Untergruppe von G .
- (11) Zeige: Der Kern eines Gruppenhomomorphismus $\varphi: G \rightarrow H$ ist stets ein Normalteiler in G .
- (12) Zeige: Untergruppen vom Index 2 sind stets normal.
- (13) Bestimme die Ordnung von $(1, 2, 3)(4, 5)(6, 7) \in S_{10}$.
- (14) Zeige: S_3 ist auflösbar.
- (15) Zeige: A_n ist ein Normalteiler der S_n vom Index 2.
- (16) Definiere den Begriff der Auflösbarkeit.
- (17) Begründe, warum die S_n für $n \geq 5$ nicht auflösbar ist.
- (18) Begründe, warum p -Gruppen stets auflösbar sind.
- (19) Zeige oder widerlege: Die A_n ist von den 2-Zyklen erzeugt.
- (20) Zeige oder widerlege: Jede endliche Gruppe der Ordnung n ist isomorph zu einer Untergruppe der S_n .
- (21) Bestimme eine p -Sylowuntergruppe der S_p , wobei p eine Primzahl ist.
- (22) Formulieren Sie die Sylowsätze.
- (23) Sei p ein Primteiler von $|G|$. Zeige: Falls es höchstens eine p -Sylowuntergruppe gibt, so hat G einen nicht-trivialen Normalteiler.
- (24) Sei $n := |G| < \infty$ und p ein Primteiler von n . Zeige oder widerlege: Es gibt höchstens $n/2$ verschiedene p -Sylowuntergruppen.
- (25) Zeige oder widerlege: Eine Gruppe der Ordnung 33 ist stets abelsch.
- (26) Sei p eine ungerade Primzahl und $|G| = 2p$. Zeige oder widerlege: Dann ist G abelsch.
- (27) Zeige: Gruppen der Ordnung p^2 sind stets abelsch.