

9. Übungsblatt Quantencomputing

Aufgabe 1

Seien H^A und H^B endlich dimensionale Hilberträume und $H = H^A \otimes H^B$. Sei $|\Psi\rangle$ ein Zustand in H^A . Sei $|u\rangle \in H^B$ normiert. Zeige: $|\Psi\rangle \otimes |u\rangle$ induziert auf H^A den Zustand $|\Psi\rangle$.

Aufgabe 2 Im File `aufgabe2.py` finden Sie eine unvollständige Simulation des Phasenschätzers. Vervollständigen Sie das Programm. Nutzen Sie dazu die Klasse `ControlledGate` aus der `cirq`-Bibliothek.

Aufgabe 3 Sei G eine abelsche Gruppe und $\hat{G} := \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ die Gruppe der Charaktere. Wir schreiben χ_0 für den trivialen Charakter, d.h. $\chi_0(g) = 1$ für alle $g \in G$. Ferner schreiben wir $e \in G$ für das neutrale Element von G . Zeige:

a)

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \text{if } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{if } \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

b)

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \text{if } g = e, \\ 0, & \text{if } g \neq e. \end{cases}$$

Aufgabe 4

a) Sei G eine endliche Gruppe und

$$\rho: G \longrightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{C})$$

ein Gruppenhomomorphismus. Wir nennen dann ρ eine Darstellung von G . Sei $\chi_\rho: G \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\chi_\rho(g) := \text{Spur}(\rho(g))$. Zeige, dass χ_ρ eine Klassenfunktion ist, d.h. $\chi_\rho(\tau^{-1}\sigma\tau) = \chi_\rho(\sigma)$ für alle $\sigma, \tau \in G$.

b) Sei $G = S_3$ und $\sigma = (1, 2, 3), \tau = (1, 2)$. Es gilt $\langle \sigma, \tau \rangle = G$. Sei ρ definiert durch

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Konjugationsklassen von G sowie die Werte $\chi_\rho(\lambda)$ für alle $\lambda \in G$.

c) Sei $V = \mathbb{C}^3$ und e_1, e_2, e_3 die Standardbasis. Für $\lambda \in S_3$ wird durch $f_\lambda(e_i) := e_{\lambda(i)}$ ein Automorphismus von V definiert. Zeige: Durch die Darstellungsmatrizen von f_λ wird eine Darstellung der S_3 definiert. Berechne den zugehörigen Charakter.

Zu bearbeiten bis: Mi 19.12.2023