Prof. Dr.Werner Bley
Eva Brenner 28.11.2023

7. Übungsblatt Quantencomputing

Aufgabe 1 Für $0 \leq x, y < 2^n$ seien $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \{0,1\}$, bzw. $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \{0,1\}$ die Ziffern der Binärdarstellung, also wie üblich $x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$ usw. Wir setzen

$$x \cdot y := \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i \pmod 2.$$

Sei $H_n = H^{\otimes n} \colon {}^q H^{\otimes n} \longrightarrow {}^q H^{\otimes n}$ der n-fache Tensor der Hadamardtransformation. Zeige für $|x\rangle \in {}^q H^{\otimes n}$

$$H_n |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle.$$

Aufgabe 2 In dieser Aufgabe wird der *Algorithmus von Deutsch-Jozsa* analysiert.
Die Funktion $f \colon \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ habe die folgende Eigenschaft: Entweder ist f konstant (Typ (K)) oder es gilt $|f^{-1}(0)| = 2^{n-1} = |f^{-1}(1)|$ (Typ (B) für balanziert). Wir wollen entscheiden, welcher Typ vorliegt.

a) Zeige, dass ein klassicher Computer dazu im schlechtesten Fall $2^{n-1}+1$ Funktionsauswertungen braucht.

Falls wir ein Quantenbauteil

$$\begin{aligned} U_f \colon {}^q H^{\otimes n} \otimes {}^q H &\longrightarrow {}^q H^{\otimes n} \otimes {}^q H, \\ |x\rangle^n \otimes |y\rangle &\mapsto |x\rangle^n \otimes |y \oplus f(x)\rangle \end{aligned}$$

zur Verfügung haben, so kommt der folgende Algorithmus mit nur einem Aufruf von U_f aus.

1. Präpariere den Anfangszustand $|0\rangle^n \otimes |1\rangle$.
2. Wende H_{n+1} an.
3. Wende U_f an.
4. Wende $H_n \otimes id$ an.
5. Miss das erste Register. Ist $|x\rangle^n = |0\rangle^n$, so liegt Typ (K) vor, andernfalls Typ (B).

(b) Zeige, dass nach Schritt 3 die Superposition

$$|\phi_3\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle^n \right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

vorliegt.

(c) Zeige, dass nach Schritt 4 die Superposition

$$|\phi_4\rangle = \left(\frac{1}{2^n} \sum_{z=0}^{2^n-1} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} (-1)^{x \cdot z} |z\rangle^n \right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

vorliegt.
(d) Weise die Korrektheit von Schritt 5 nach.

Aufgabe 3 Programmieren Sie den Algorithmus von Deutsch-Jozsa.

Aufgabe 4 Sei $x \in \mathbb{Q}$ und $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ und es gelte

$$\left| \frac{p}{q} - x \right| \leq \frac{1}{2q^2}.$$

Zeige, dass dann $\frac{p}{q}$ ein Teilbruch in der Kettenbruchentwicklung von x ist.

Zu bearbeiten bis: Mi 07.12.2023