Prof. Dr.Werner Bley
Eva Brenner

14.11.2023

5. Übungsblatt Quantencomputing

Aufgabe 1 (a) Zeige, dass man die Observablen $\sigma_z \otimes \sigma_z$ und $\sigma_x \otimes \sigma_x$ gleichzeitig scharf messen kann. (Hinweis: Verwende die Bell-Basis $\Psi^{\pm}, \Phi^{\pm}$.)
(b) Schreiben Sie ein Pythonprogramm, dass die Aussage der Teilaufgabe (a) illustriert. Präparieren Sie dazu einen der Zustände aus $\{\Psi^{\pm}, \Phi^{\pm}\}$ und simulieren Sie die Messungen mit cirq.

Aufgabe 2 Sei $H = {}^q H^{\otimes 2}$. Schreiben Sie ein Pythonprogramm, dass die unitäre Abbildung

$$(H \otimes id) \circ CNOT \circ (H \otimes H) \colon {}^q H^{\otimes 2} \longrightarrow {}^q H^{\otimes 2}$$

als Schaltkreis realisiert. Hierbei bezeichnet H die Hadamardabbildung. Messen Sie in der Rechenbasis und vergleichen Sie das empirische Ergebnis mit den theoretischen Messwahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 3 Sei ρ ein Dichteoperator auf dem Qbit-Raum ${}^q H$. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte reelle Zahlen x_1, x_2, x_3 mit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 \leq 1$ gibt, so dass ρ bezüglich der Basis $|0\rangle, |1\rangle$ die Matrixdarstellung

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & 1 - x_3 \end{pmatrix}$$

hat. Man nennt dies die *Bloch-Darstellung* von ρ.
Zeigen Sie weiter:

$$\rho \text{ ist ein reiner Zustand } \iff x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Aufgabe 4 Seien H^A und H^B endlich dimensionale Hilberträume der Dimensionen n_A und n_B. Seien $\mathcal{B}_A = \{e_a, a = 1, \dots, n_A\}$, und $\mathcal{B}_B = \{f_b, b = 1, \dots, n_B\}$, Orthonormalbasen von H^A und H^B. Bezüglich der Basis $e_a \otimes f_b, a = 1, \dots, n_A, b = 1, \dots, n_B$, habe der Dichteoperator ρ die Matrix $\rho_{a_1 b_1, a_2 b_2}$. Setze

$$t_{a_1, a_2} := \sum_{b=1}^{n_B} \rho_{a_1 b, a_2 b}.$$

Die lineare Abbildung $\rho^A \colon H^A \longrightarrow H^A$ sei bezüglich der Basis $\mathcal{B}_A$ durch die Matrix $T = (t_{a_1,a_2})_{1 \leq a_1, a_2 \leq n_A}$ gegeben. Man zeige, dass ρ^A ein Dichteoperator auf H^A ist.

Zu bearbeiten bis: Mi 23.11.2023