Prof. Dr.Werner Bley
Eva Brenner 07.11.2023

4. Übungsblatt Quantencomputing

Aufgabe 1 Sei H ein endlich dimensionaler Hilbertraum und $\rho\colon H \longrightarrow H$ eine lineare Abbildung. Dann nennt man ρ einen Dichteoperator, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. ρ ist selbstadjungiert, d.h. $\rho^* = \rho$.
2. ρ ist positv, d.h. es gilt $\langle \psi, \rho(\psi) \rangle \geq 0$ für alle $\psi \in H$.
3. $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

Sei nun $|\psi\rangle \in H$ mit $||\psi|| = 1$. Zeige:

a) $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ist ein Dichteoperator.
b) Für $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ und einen selbstadjungierten Operator $A\colon H \longrightarrow H$ gilt:

$$\mathrm{Tr}(\rho A) = \langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A\psi \rangle.$$

Aufgabe 2 Sei ρ wie in Aufgabe 1 ein Dichteoperator. Sei $n := dim(H) < \infty$. Zeigen Sie:
a) Es gibt $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$p_j \geq 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{n} p_j = 1,$$

sowie eine Orthonormalbasis $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$, so dass

$$\rho = \sum_{j=1}^{n} |\psi_j\rangle p_j \langle\psi_j|.$$

b) Es gilt: $0 \leq \rho^2 \leq \rho$.

Aufgabe 3 Sei A eine Observable und $|\psi\rangle$ ein reiner Zustand. Dann definiert man die Streuung von A durch

$$\Delta_\psi(A) := \sqrt{\langle \psi | (A - \langle A \rangle_\psi \mathrm{id})^2 \psi \rangle} = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle_\psi \mathrm{id})^2 \rangle_\psi}.$$

Zwei Observablen A und B heißen kompatibel, falls $[A, B] = 0$ gilt, wobei $[A, B] := AB - BA$.
Zeigen Sie:

a) $\Delta_A(\psi) = 0 \iff |\psi\rangle$ ist ein Eigenzustand.
b) $\Delta_\psi(A)\Delta_\psi(B) \geq \left|\langle \frac{1}{2i}[A, B] \rangle_\psi\right|$.

Ein Spezialfall von (b) ist die bekannte Heisenbergsche Unschärferelation.

Zu bearbeiten bis: Mi 16.11.2023