Prof. Dr.Werner Bley
Eva Brenner 23.01.2024

# 13. Übungsblatt Quantencomputing

**Aufgabe 1**
Studieren Sie die Resultate zur Darstellungstheorie im Protokoll.

**Aufgabe 2**
Sei $G$ eine endliche Gruppe und seien $\sigma, \tau \in \hat{G}$ zwei irreduzible Darstellungen. Sei $1 \leq i, j \leq d_\sigma$ und $1 \leq k, l \leq d_\tau$. Zeige:
a) Für $1 \leq i, j \leq d_\sigma$ und $1 \leq k, l \leq d_\tau$ gilt

$$\frac{d_\sigma}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\sigma(x)_{ij}} \tau(x)_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma = \tau, i = k \text{ und } j = l, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Für die zugehörigen Charaktere $\chi_\sigma$ und $\chi_\tau$ gilt

$$(\chi_\sigma, \chi_\tau)_G := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_\sigma(x)} \chi_\tau(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma = \tau, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Aufgabe 3** Sei $G$ eine endliche Gruppe und $L$ die (Links)-reguläre Darstellung definiert durch $L(g)|h\rangle := |gh\rangle\rangle$. Sei $F_G$ die Quantenfouriertransformation (siehe Protokoll). Zeige:

$$F_G L(x) F_G^* = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} (\sigma(x) \otimes I_{d_\sigma}) \, .$$

**Aufgabe 4** In der Vorlesung werden wir zeigen, dass $F_G$ unitär ist. Folgern Sie aus Aufgabe 3 die folgenden Identitäten:

$$\text{a)} \qquad \sum_{\sigma \in \hat{G}} d_\sigma^2 = |G|.$$

$$\text{b)} \qquad \sum_{\sigma \in \hat{G}} d_\sigma \chi_\sigma(x) = \begin{cases} |G|, & \text{falls } x = 1, \\ 0, & \text{falls } x \neq 1. \end{cases} .$$

Zu bearbeiten bis: Mi 31.01.2024