Prof. Dr.Werner Bley
Eva Brenner 16.01.2024

12. Übungsblatt Quantencomputing

Aufgabe 1
Sei $H^A = {}^q H^{\otimes n}$ und $H^B = {}^q H^{\otimes m}$. Sei

$$|\Psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^m-1} \psi_{xy} |x\rangle^n \otimes |y\rangle^m, \quad \psi_{xy} \in \mathbb{C},$$

ein reiner Zustand auf $H^A \otimes H^B$.
a) Wir messen zuerst das zweite Register und sodann das erste Register. Sei $0 \leq x_0 < 2^n$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit misst man in der zweiten Messung x_0.
b) Wir ignorieren das zweite Register und messen im ersten Register. Sei $0 \leq x_0 < 2^n$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit misst man x_0.

Aufgabe 2 Sei G eine endliche abelsche Gruppe, $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ und $H \leq G$ eine Untergruppe mit $H \neq 1$ und $H \neq G$. Sei $H^\perp = \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(h) = 1, \forall h \in H\}$.
a) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} H \text{ maximal} \quad &\Longleftrightarrow \quad H^\perp \text{ minimal} , \\ H \text{ minimal} \quad &\Longleftrightarrow \quad H^\perp \text{ maximal} . \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass jede minimale Untergruppe zyklisch ist. Insbesondere ist die Anzahl der minimalen Untergruppen durch $|G|$ beschränkt.

Aufgabe 3 Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Seien $g_1, \ldots, g_L$ zufällig gewählte Gruppenelemente (wir nehmen hier Gleichverteilung an und "ziehen mit Zurücklegen"). Mit $P\{\langle g_1, \ldots, g_L \rangle = G\}$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass $g_1, \ldots, g_L$ die Gruppe G erzeugen. Zeige:

$$P\{\langle g_1, \ldots, g_L \rangle = G\} \geq 1 - \frac{|G|}{2^L}.$$

Hinweis: Sei $H \leq G$ eine maximale Untergruppe. Zeigen Sie zunächst: $P\{\langle g_1, \ldots, g_L \rangle \leq H\} \leq \frac{1}{2^L}$.

Aufgabe 4 Implementieren Sie Shors Algorithmus mit Fouriersampling.

Zu bearbeiten bis: Mi 24.01.2024