Prof. Dr.Werner Bley
Eva Brenner 09.01.2024

11. Übungsblatt Quantencomputing

Aufgabe 1
Sei G eine abelsche Gruppe und H eine Untergruppe. Sei

$$H^{\perp} := \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(h) = 1, \forall h \in H\}.$$

Zeigen Sie:
a) $H^{\perp}$ ist eine Untergruppe von $\hat{G}$.
b) Für $\chi \in \hat{G}$ gilt:

$$\sum_{h \in H} \chi(h) = \begin{cases} |H|, & \text{falls } \chi \in H^{\perp}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) $H^{\perp} \simeq \widehat{G/H}$.
d) $H = \bigcap_{\chi \in H^{\perp}} \ker(\chi)$.
e) Sei $\langle \chi_1, \ldots, \chi_m \rangle = H^{\perp}$. Dann gilt: $H = \bigcap_{i=1}^{m} \ker(\chi)$.
f) In e) kann man genau dann $m = 1$ wählen, wenn G/H zyklisch ist.

Aufgabe 2 Sei $G = \mathbb{F}_2^n$ als abelsche Gruppe bez. der Addition. Für $z \in G$ sei $\chi_z(t) = (-1)^{z \cdot t}$ der in Aufgabe 3, Blatt 10, definierte Charakter. Sei $0 \neq s \in G$ und $H = \langle s \rangle = \{0, s\}$. Zeige: Für jedes m in Aufgabe 1e) gilt $m \geq n - 1$. $m = n - 1$ ist möglich.
Stelle den Zusammenhang her zum klassischen Teil in Simons Algorithmus.

Aufgabe 3 Sei N eine natürliche Zahl und

$$D_N = \langle x, y \mid x^N = y^2 = 1, yxy = x^{-1} \rangle$$

die Diedergruppe der Ordnung $2N$.
a) Veranschaulichen Sie D_N als Symmetriegruppe des regelmäßigen N-Ecks.
b) Zeigen Sie, dass jedes $g \in D_N$ eindeutig in der Form $g = y^k x^s$ mit $k \in \{0, 1\}$ und $s \in \{0, \ldots, N-1\}$ geschrieben werden kann.
c) Zeigen Sie, dass $\langle x \rangle$ ein Normalteiler ist und yx^s stets Ordnung 2 hat.

Aufgabe 4
Implementieren Sie Shors Algorithmus.

Zu bearbeiten bis: Mi 17.01.2024