Prof. Dr.Werner Bley
Eva Brenner 19.12.2023

10. Übungsblatt Quantencomputing

Aufgabe 1
Für den Phasenschätzer aus der Vorlesung gilt: Wenn man

$$t := n + \left\lceil \log\left(2 + \frac{1}{2\varepsilon}\right)\right\rceil \tag{1}$$

setzt, so liefert der Phasenschätzer mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1-\varepsilon$ eine Approximation an den Wert von φ mit einer Genauigkeit von n Bits.

Sei nun $|\Psi\rangle = \sum_u c_u|u\rangle$ eine Superposition von Eigenzuständen. Jedes $|u\rangle$ habe Eigenwert $\exp(2\pi i\varphi_u)$. Wenden Sie nun den Algorithmus des Phasenschätzers auf den Anfangszustand $|0\rangle\otimes|\Psi\rangle$ an. Zeigen Sie: Wenn man t wie in (1) wählt, so liefert der Phasenschätzer mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $|c_u|^2(1-\varepsilon)$ eine Approximation an den Wert von φ_u mit einer Genauigkeit von n Bits.

Aufgabe 2 Sei $G = \{g_0, \ldots, g_{N-1}\}$ eine endliche abelsche Gruppe. Wir identifizieren $|g_j\rangle$ mit dem Rechenbasiselement $|j\rangle^n \in {}^qH^{\otimes n}$, wobei $n := \lceil \log_2(N)\rceil$. Sei $\mathbb{H} := \langle |g_0\rangle, \ldots, |g_{N-1}\rangle\rangle_{\mathbb{C}}$. Dann ist $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum mit ON-Basis $|g_0\rangle, \ldots, |g_{N-1}\rangle$. Sei $\hat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{N-1}\}$ die Gruppe der abelschen Charaktere von G, siehe Übungsblatt 8, Aufgabe 3. Wir identifizieren $|\chi_j\rangle$ mit dem Rechenbasiselement $|j\rangle^n$. Beachte: Diese Identifizierungen sind abhängig von der Wahl der Numerierungen der Gruppenelemente bzw. der Charaktere. Die Fouriertransfomation ist definiert durch

$$F_G := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{g\in G} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g)|\chi\rangle\langle g| : \mathbb{H} \quad \longrightarrow \mathbb{H}.$$

a) Zeige, dass F_G unitär ist.
b) Sei $N = 2^n$ und $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ die zyklische Gruppe der Ordnung N. Zeige, dass es eine geeignete Numerierung gibt, so dass F_G die bekannte Quantenfouriertransformation ist.

Aufgabe 3 Betrachte $G = \mathbb{F}_2^n$ als abelsche Gruppe bez. der Addition.
a) Zeige, dass die Charaktere von G gegeben sind in der Form χ_s für $s \in G$, wobei

$$\chi_s(t) := (-1)^{s\cdot t}.$$

Hierbei verwenden wir sinngemäß die Notation aus Übungsblatt 7, Aufgabe 1, d.h.

$$s \cdot t = \sum_i s_i t_i \pmod 2.$$

b) Zeige, dass bei geeigneter Numerierung die Fouriertransformation F_G gleich $H^{\otimes n}$ ist, wobei H die Hadamard-Transformation bezeichnet.

Aufgabe 4
Implementieren Sie Simons Algorithmus.

Zu bearbeiten bis: Mi 10.01.2024