Prof. W. Bley
Andrei Lavrenov, PhD 13.12.2023

9. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und C eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie, daß es eine endliche abelsche Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ gibt mit $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq C$. (Hinweis: Benutzen Sie Kreiskörpertheorie und den Dirichletschen Primzahlsatz.)

(b) Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, daß es eine endliche abelsche Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ gibt mit $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq G$.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass für jede ungerade Primzahl p gilt: $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(\frac{-1}{p})p}\right) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_p)$
Hinweis: Betrachten Sie die Gaußsche Summe

$$\tau(p) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \left(\frac{a}{p}\right) \zeta_p^a.$$

b) Zeigen Sie, dass jeder quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ in einem zyklotomischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ enthalten ist.

Aufgabe 3

Zeige, daß die Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Z}_7$ eine Lösung hat.

Aufgabe 4

Zeigen Sie:
a) $\mathbb{Z}_p$ ist nullteilerfrei.
b) Eine ganze p-adische Zahl $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$ ist genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z}_p$, wenn $a_0 \neq 0$ ist.

Besprechung der Aufgaben am 19.12.2023 in der Übung